Feuilles d'exercices n°16

Exercice 2. Montrer que l'application suivante est linéaire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$

Si u, v sont deux suites et λ, μ deux réels, alors on regarde f appliqué à la suite $(\lambda u + \mu v)$:

$$f(\lambda u + \mu v) = ((\lambda u + \mu v)_0, (\lambda u + \mu v)_1) = (\lambda u_0 + \mu v_0; \lambda u_1 + \mu v_1) = \lambda(u_0, u_1) + \mu(v_0, v_1) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

Exercice 5. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

1. Développer $(u+v)^2$
   On développe comme pour un produit, conformément aux propriétés de distributivité montrées dans l'exercice 4.
   $$(u+v)^2 = (u+v)\circ(u+v) = u\circ u + u\circ v + v\circ u + v\circ v = u^2 + u\circ v + v\circ u + v^2$$

2. Développer $(id-u)\circ(id+u)$
   $$(id-u)\circ(id+u) = id\circ id + id\circ u - u\circ id - u\circ u = id + u - u - u^2 = id - u^2$$

3. Si $u^2 = 0$, montrer que $(id-u)$ est bijective
   D'après la question précédente, $(id-u)\circ(id+u) = id - u^2$. Si $u^2 = 0$, on a donc $(id-u)\circ(id+u) = id$ et donc $id - u$ est bijective, de réciproque $id + u$.

Exercice 11. Quel est le noyau de l'application linéaire $P \mapsto P - XP'$ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$?
On prend P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Notons ϕ l'application de l'énoncé et cherchons à quelle condition nécessaire et suffisante $\phi(P) = 0$. Notons $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, avec (a_k) les coefficients de P.

$$\begin{aligned}
\phi(P) = 0 &\iff P - XP' = 0 \\
&\iff \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - x\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = 0 \\
&\iff a_0 + \sum_{k=1}^{n}(1-k)a_k x^k = 0 \\
&\iff \forall k \in [|0;n|], (1-k)a_k = 0 \text{ en identifiant les coefficients} \\
&\iff \forall k \in [|0;n|], 1-k = 0 \text{ ou } a_k = 0 \\
&\iff \forall k \in [|0;n|], k \neq 1 \Rightarrow a_k = 0 \\
&\iff P = a_1 x
\end{aligned}$$

On en déduit : $\ker(P) = \{a_1 x | a_1 \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(x)$. On peut aussi interpréter $\ker(P)$ comme étant l'ensemble des fonctions linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14. Pour la semaine du 3 février seulement, puisqu'on n'a pas encore parlé de symétries. Soit s un endomorphisme de E vérifiant $s\circ s = id_E$

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $x + s(x) \in \text{Ker}(s - id_E)$ et $x - s(x) \in \text{Ker}(s + id_E)$
   On rappelle : $y \in \ker(s - id_E) \iff s(y) = y$. Vérifions donc :
   $$s(x + s(x)) = s(x) + (s\circ s)(x) = s(x) + id_E(x) = s(x) + x = x + s(x)$$
   On a bien $x + s(x) \in \ker(s - id_E)$. De même :
   $$s(x - s(x)) = s(x) - (s\circ s)(x) = s(x) - id_E(x) = s(x) - x = -(x - s(x))$$
   Et donc $x - s(x) \in \ker(s + id_E)$

2. En déduire que $\text{Ker}(s - id_E)$ et $\text{Ker}(s + id_E)$ sont supplémentaires
On peut déjà vérifier que ces deux ensembles sont en somme directe : si on a à la fois $s(x) = x$ et $s(x) = -x$, alors $x = -x$ et donc $x = 0$:
$$\ker(s - id_E) \cap \ker(s + id_E) = \{0\}$$
Par ailleurs, prenons $x \in E$. On cherche à décomposer x selon $\ker(s - id_E)$ et $\ker(s + id_E)$. En utilisant la question précédente, on sait : $x + s(x) \in \ker(s - id_E)$ et $x - s(x) \in \ker(s + id_E)$. Or,
$$x + s(x) + x - s(x) = 2x$$
En posant $x_1 = \frac{x+s(x)}{2}$ et $x_2 = \frac{x-s(x)}{2}$, on a alors $x_1 \in \ker(s - id_E)$, $x_2 \in \ker(s + id_E)$ et $x_1 + x_2 = x$. Ceci étant vrai pour tout x, $\ker(s - id_E) \oplus \ker(s + id_E) = E$
3. En déduire que s est une symétrie dont on précisera les caractéristiques.
Il suffit de montrer que s est la symétrie sur $F = \ker(s - id_E)$ parallèlement à $G = \ker(s + id_E)$. Cette symétrie agit en associant à $x_F + x_G$ le vecteur $x_F - x_G$. D'après la décomposition de la question précédente, la symétrie sur F parallèlement à G associe donc à x le vecteur $\frac{1}{2}(x + s(x)) - \frac{1}{2}(x - s(x)) = \frac{1}{2}(2s(x)) = s(x)$. s est donc bien la symétrie sur F parallèlement à G.

Exercice 15. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ soit liée.

1. Montrer que si $x \neq 0$, il existe un unique réel λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$
Puisque x et $f(x)$ sont liés, il existe a, b qui ne sont pas tous les deux nuls tels que $ax + bf(x) = 0$. Donc $bf(x) = -ax$. Puisque $x \neq 0$, $b \neq 0$ (car sinon on aurait $ax = 0$ et donc $a = 0$ et a, b ne sont pas tous les deux nuls). On peut donc diviser par b :
$$f(x) = -\frac{a}{b}x$$
C'est ce qu'on voulait démontrer, avec $\lambda_x = -\frac{a}{b}$
2. Comparer λ_x et λ_y lorsque (x, y) est libre.
Soit (x, y) une famille libre. D'après la question précédente, il existe λ_x, λ_y tels que $f(x) = \lambda_x x$ et $f(y) = \lambda_y y$. Par ailleurs, puisque $x+y$ est un vecteur, il existe μ tel que $f(x+y) = \mu(x+y) = \mu x + \mu y$. Or par linéarité, on a aussi $f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$. Puisque (x, y) est une famille libre, on en déduit : $\lambda_x = \mu$ et $\lambda_y = \mu$ donc $\boxed{\lambda_x = \lambda_y}$
3. Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$
On dit alors que f est une homothétie
On cherche donc à montrer que tous les λ_x sont en fait un seul et même λ indépendant du choix de x. Soit (x, y) un couple de vecteurs de E, montrons que $\lambda_x = \lambda_y$. On l'a déjà montré dans le cas où (x, y) est une famille libre. Si (x, y) est liée (avec x, y non nuls), un des deux vecteurs s'exprime en fonction de l'autre. Écrivons sans restriction de généralité : $y = \alpha x$. Alors $f(y) = \lambda_y y = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha\lambda_x x = \lambda_x \alpha x = \lambda_x y$ Puisque y est non nul, $\lambda_x y = \lambda_y y \Rightarrow \lambda_x = \lambda_y$. λ est donc unique, et donc pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$. f est une homothétie.

Exercice 16. Soient p, q deux projecteurs d'un même ensemble E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$
Raisonnons par double implication.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $p \circ q = q \circ p = 0$. Alors,
$$\begin{aligned}(p + q) \circ (p + q) &= p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q \\ &= p \circ p + q \circ q \text{ par hypothèse} \\ &= p + q \text{ car } p, q \text{ projecteurs}\end{aligned}$$
Donc $p + q$ est un projecteur.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $(p + q)^2 = (p + q)$. Alors, avec le même calcul que précédemment, $p \circ q + q \circ p = 0$, i.e. $p \circ q = -q \circ p$. Utilisons $p \circ p = p$:
$$\begin{aligned}p \circ q = -q \circ p &\Rightarrow p \circ p \circ q = -p \circ q \circ p \\ &\Rightarrow p \circ q = -(p \circ q) \circ p \\ &\Rightarrow p \circ q = q \circ p \circ p \\ &\Rightarrow p \circ q = q \circ p\end{aligned}$$

On conclut : $p \circ q + q \circ p = 0 = 2p \circ q$ et donc $\boxed{p \circ q = 0}$ et de même $\boxed{q \circ p = 0}$

2. Montrer que dans ce cas : $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$

   — Montrons que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q)$ sont en somme directe : soit $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. Montrons $y = 0$. Puisque $y \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Ainsi,

   $$q(y) = q(p(x)) = 0$$

   On en déduit que $q(y) = 0$. Or puisque $y \in \mathrm{Im}(q)$ et que q est un projecteur, $q(y) = y$ et on en déduit $\boxed{y = 0}$

   — Soit $y \in \mathrm{Im}(p+q)$. Alors il existe x tel que $y = (p+q)(x) = p(x)+q(x)$ et donc $y \in \mathrm{Im}(p)+\mathrm{Im}(q)$.

   — Réciproquement, si $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$, il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $y = p(x_1) + q(x_2)$. Alors,

   $$p(y) = p(p(x_1)) + p(q(x_2)) = p(x_1)$$

   $$q(y) = q(p(x_1)) + q(q(x_2)) = q(x_2)$$

   On en déduit :

   $$y = p(x_1) + q(x_2) = p(y) + q(y) = (p+q)(y) \in \mathrm{Im}(p+q)$$

3. Montrer que dans ce cas : $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$

   — Soit $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$. Alors, $(p+q)(x) = 0$. On en déduit $p(x) + q(x) = 0$ et en appliquant p :

   $$p(p(x)) + p(q(x)) = p(x) + 0 = p(x) = 0$$

   En appliquant q :

   $$q(p(x)) + q(q(x)) = 0 + q(x) = q(x) = 0$$

   On en déduit : $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$ donc $x \in \ker(p) \cap \ker(q)$

   — Soit $x \in \ker(p) \cap \ker(q)$. Alors $p(x) = q(x) = 0$ et donc $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = 0 + 0 = 0$ et donc $x \in \ker(p+q)$