Devoir surveillé n°3 du 7 janvier

Calculatrice interdite. Tous les résultats doivent être soigneusement justifiés, que l'énoncé le précise ou non. La présentation et la rédaction sont centrales dans l'appréciation d'une copie. Le barème est indicatif et peut être modifié.

Check-list avant de rendre la copie :

- ☐ Copie tenue bras tendu : on voit les changements d'exercices et de questions.
  Pour ce faire, sauter une ligne entre les questions, encadrer les noms des exercices.
- ☐ Copie tenue bras tendu : copie aérée et lisible.
  Mettre une marge si il n'y en a pas sur la feuille, sauter des lignes si besoin, soigner la calligraphie (si besoin, écrire plus gros, sur les lignes, changer de stylo), éviter les longs paragraphes : aller à l'argument principal.
- ☐ Pages numérotées et rangées dans l'ordre.
- ☐ Exercices et questions numérotées.
- ☐ Résultats encadrés.
  À la règle, et sans surligneur.
- ☐ Phrases réponses, noms de théorèmes soulignés.
- ☐ Pas ou peu de ratures.
  Si c'est le cas, barrer proprement la question concernée, la séparer du reste du texte par deux lignes horizontales et recommencer proprement. Penser à utiliser un brouillon pour les calculs !
- ☐ Variables introduites par "soit" (quand c'est nécessaire).
  Par exemple, f ou (u_n) sont en général des variables introduites dans l'énoncé alors que x, n ne le sont pas. Les variables muettes utilisées dans une phrase quantifiée, les variables de sommation, n'ont pas besoin d'être introduites par "soit".
- ☐ Syntaxe et orthographe correctes.
  Faire en particulier attention aux mots "mathématiques" (noms de mathématiciens dans les théorèmes, termes techniques comme "asymptote", "dérivabilité"...)
- ☐ Modes de raisonnements / étapes indiquées.
  On ne ré-écrit pas l'énoncé, mais on précise "montrons maintenant que (...)", "étudions la limite de (...)" et "raisonnons par analyse-synthèse/l'absurde/récurrence/double implication..."

Exercice 1 - Nombre d'or (65 pts)

On appelle **nombre d'or** et on note ϕ la solution positive de l'équation d'inconnue x : $x^2 - x - 1 = 0$.

Partie I - suite récurrente (19 pts)

1. Justifier $\phi = \sqrt{1+\phi}$ et : $1 < \phi < 2$
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$. Montrer :
$$\forall n \geq 1, 1 \leq u_n \leq \phi$$
3. Montrer que (u_n) est une suite croissante.
4. Écrire un programme Python qui demande à l'utilisateur un entier n et affiche u_n
5. Montrer : (u_n) converge vers ϕ
6. Montrer :
$$\forall n \geq 1, |u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \phi|$$
7. En déduire que pour tout $n \geq 1$,
$$|u_n - \phi| \leq \frac{1}{(2\sqrt{2})^{n-1}}$$
On dit que (u_n) a une vitesse de convergence géométrique.

Partie II - Suite de Fibonacci et fraction continue. (21 pts)

1. On appelle **suite de Fibonacci** la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
   (a) Donner les 10 premiers termes de la suite classique de Fibonacci.
   (b) Écrire un programme Python qui demande à l'utilisateur un entier n et affiche u_n.
   (c) Donner le terme général de la suite de Fibonacci.
   (d) Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \phi$
2. On se propose maintenant d'étudier indépendamment la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. On définit une suite (ϕ_n) par $\phi_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, \phi_{n+1} = 1 + \frac{1}{\phi_n} = f(\phi_n)$ où $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \phi_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$
   (b) Montrer que ϕ est un point fixe de f
   (c) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que la suite $(|\phi_n - \phi|)$ est décroissante.
   (d) Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |\phi_n - \phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$
   (e) En déduire la nature de la suite (ϕ_n) et justifier l'écriture :
$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$$

Partie III - Une suite implicite (24 pts)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par la relation $f_n(x) = x^{2n+1} - x^{n+1} - 1$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations de f_n et montrer qu'elle s'annule en un seul réel $x_n > 1$
2. Montrer que la suite (x_n) décroit. *On pourra regarder le signe de $f_{n+1}(x_n)$*
3. Montrer que la suite (x_n) converge vers 1 puis que $\frac{1}{x_n} \to 1$
4. Montrer que $h : x \mapsto x(x-1)$ est une bijection croissante de $[1; +\infty[$ vers $\mathbb{R}_+$. Que dire de h^{-1} ?
5. On pose pour tout $n > 0$: $u_n = x_n^n$. En exprimant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h(u_n)$ en fonction de x_n montrer que (u_n) converge vers ϕ

Exercice 2 - Probas et matrices de Kac (CCP 2020 PSI - 30 pts)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux n boules numérotées de 1 à n. Le nombre de boules initialement contenues dans l'urne U_1 est une variable aléatoire notée N_0.

— À chaque instant entier $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit un des n numéros de façon équiprobable puis on change d'urne la boule portant ce numéro. Les choix successifs sont supposés indépendants.

— Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note N_k la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne U_1 après l'échange effectué à l'instant k.

— Exemple : supposons $n = 4$ et qu'à l'instant 0, l'urne U_1 contient les boules numérotées $1, 3, 4$ et l'urne U_2 la boule 2. Dans ce cas, $N_0 = 3$.

  — Si le numéro 3 est choisi à l'instant 1, on déplace la boule 3 et alors N_1 prend la valeur 2

  — Si le numéro 2 est choisi à l'instant 1, on déplace la boule 2 et alors N_1 prend la valeur 4

— Pour tout $\ell \in [|0; n|]$, on note $E_{k,\ell}$ l'événement $(N_k = \ell)$ et $p_{k,\ell} = \mathbb{P}(E_{k,\ell})$

— On note enfin $Z_k = \begin{pmatrix} p_{k;0} \\ p_{k;1} \\ \vdots \\ p_{k;n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ la matrice colonne qui contient la loi de la variable aléatoire N_k

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de la famille $(E_{k,0}; \dots, E_{k,n})$?
2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, et tout $j \in [|1; n|]$, déterminer $\mathbb{P}_{E_{k,j-1}}(E_{k+1,j})$
   (b) De même, donner la valeur de $\mathbb{P}_{E_{k,j+1}}(E_{k+1,j})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in [|0; n-1|]$.
   (c) Que vaut $\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,j})$ dans les autres cas ?
3. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(E_{k+1,0}) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(E_{k;1}) \text{ et } \mathbb{P}(E_{k+1,n}) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(E_{k,n-1})$$
4. Pour tout $j \in [|1; n-1|]$, montrer :
$$\mathbb{P}(E_{k+1,j}) = \frac{n-j+1}{n}\mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n}\mathbb{P}(E_{k,j+1})$$
5. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$Z_{k+1} = \frac{1}{n}A_n Z_k$$
où A_n est la matrice :
$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & n-2 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & n-1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$
6. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$Z_k = \frac{1}{n^k}A_n^k Z_0$$
7. On se place dans le cas $n = 2$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_2^{2k+1} = 4^k A_2$
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_2^{2k} = 4^{k-1}A_2^2$ en donnant l'écriture de A_2^2
   (c) Conclure en donnant une écriture de Z_k pour tout $k \in \mathbb{N}$ en fonction de $Z_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
   (d) Donner l'espérance de N_k.

Exercice 3 - Sommes et binômiaux : une formule d'inversion (28 pts)

1. Compléter le code suivant pour que la fonction `binomial(p,q)` calcule $\binom{p}{q}$:

```
def factorielle(n):
    res = ...........
    for k in range(..........):
        res = ...........
    return res
def binomial(p,q):
    if ...................... :
        return ...................
```

2. Plutôt que de calculer trois factorielles en commençant à 1, on se propose de stocker les résultats de toutes les factorielles dans une liste `lf` (pour «liste factorielles»). Compléter le code suivant.

```
def binomial(p,q):
    lf = [1]
    for k in range(1,p+1):
        lf.append(.....................)
    if ...................... :
        return ...................
```

3. Montrer que pour p, q, k tels que tout ceci soit bien défini (préciser pour quels p, q, k) :

$$\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k}$$

4. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [|0; p-1|]$. Calculer $\sum_{q=k}^{p} (-1)^q \binom{p}{q}\binom{q}{k}$

5. Montrer que si $(a_k)_{k \in [|0;n|]}$ est une famille de réels et que pour tout $k \in [|0; n|]$,

$$b_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_j$$

alors :

$$\forall p \in [|0; n|], a_p = (-1)^p \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} b_k$$

6. **Application** (si vous avez déjà bien avancé le reste du sujet).
Notons $S_{p,n}$ le nombre de *surjections* d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.
   (a) Rappeler le nombre d'applications (pas nécessairement surjectives) d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments
   (b) Justifier que le nombre d'applications de $[|1; p|]$ vers $[|1; n|]$ telles qu'exactement k éléments aient des antécédents est $\binom{n}{k} S_{p,k}$
   (c) En déduire :

$$n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{p,k}$$

   (d) En utilisant la formule de la question 3, donner une expression de $S_{p,n}$