Devoir surveillé n°3 du 7 janvier - Corrigé

*Disclaimer : comme toujours, ce corrigé a pour vocation de donner les pistes de résolution, les arguments utiles et une trame du barême, mais **pas** de présenter une rédaction exemplaire. Gardez un œil critique !*

Exercice 1 - Nombre d'or (65 pts)

On appelle **nombre d'or** et on note ϕ la solution positive de l'équation d'inconnue x : $x^2 - x - 1 = 0$.

Partie I - suite récurrente (19 pts)

1. Puisque $\phi^2 = 1 + \phi$ par définition et que ϕ est **positive** alors $\phi = \sqrt{1 + \phi}$
   On peut ensuite résoudre l'équation avec la formule classique pour trouver $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et utiliser $2 \leq \sqrt{5} \leq 3$ (par exemple) (1 pt).
2. On pose $f : x \mapsto \sqrt{1 + x}$ sur $[1; +\infty[$. f est dérivable et pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} > 0$. On en déduit que f est strictement croissante. (1 pt) D'après la question précédente, $f(\phi) = \phi$. Par récurrence :
   — Initialisation : d'après la question précédente, $1 = u_1 \leq \phi$ (1 pt)
   — Hérédité : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{aligned} 1 \leq u_n \leq \phi &\Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(\phi) \text{ par croissance de } f \text{ (1 pt)} \\ &\Rightarrow 1 \leq \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq \phi \end{aligned}$$
   et la récurrence est établie.

   Remarque : sans poser de fonction f, on pouvait aussi manipuler les inéquations algébriquement.
3. D'après la question précédente, (u_n) est une suite récurrente associée à une fonction f croissante (1 pt) donc d'après une propriété du cours, (u_n) est monotone (1 pt). Puisque d'après la question précédente $u_2 \geq u_1$, (u_n) est croissante. (1 pt)
4.
```python
from math import sqrt
n = int(input("entrez un nombre entier supérieur ou égal à 1:"))
u = 1
for k in range(1,n):
    u = sqrt(1+u)
print(u)
```
   RAPPEL : pour vérifier votre code, notamment les valeurs initiales, les bornes de la boucle : faites-le **tourner à la main** pour vérifier !
5. D'après le théorème de la limite monotone (1 pt), puisque (u_n) est monotone et bornée, elle converge vers une limite ℓ. En passant $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ à la limite, $\ell = \sqrt{1 + \ell}$ (continuité de la racine carrée). (1 pt). Ainsi, $\ell^2 = \ell + 1$ et puisque ϕ est la seule solution positive de cette équation, $\ell = \phi$ (1 pt)
6. Reprenons : $\forall x \geq 1$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$. Pour tout $x \geq 1$, $\sqrt{1 + x} \geq \sqrt{2}$ et donc $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$. (1 pt)
   Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'inégalité des accroissements finis (1 pt), puisque f est dérivable sur $[1; \phi]$ et que $u_n \in [1; \phi]$ (1 pt),
   $$|f(u_n) - f(\phi)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \phi|$$
   i.e.
   $$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \phi|$$
   (1 pt)

7. Par récurrence. (1 pt)
   - Initialisation : $u_1 = 1$ et $|u_1 - \phi| = \phi - 1 \leq 1$ d'après la question. D'autre part, $\frac{1}{(2\sqrt{2})^0} = 1$. La propriété est initialisée (1 pt)
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|u_n - \phi| \leq \frac{1}{(2\sqrt{2})^{n-1}}$. D'après la question précédente,

$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{(2\sqrt{2})^{n-1}}$$

   puisque $\frac{1}{2\sqrt{2}} > 0$. (1 pt) Ainsi, $|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{(2\sqrt{2})^{n-1}} = \frac{1}{(2\sqrt{2})^n}$ et la récurrence est établie.
   - Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \phi| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

   On dit que (u_n) a une vitesse de convergence géométrique.

Partie II - Suite de Fibonacci et fraction continue. (21 pts)

1. On appelle **suite de Fibonacci** la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
   (a) $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34$ (1 pt)

   (b)
```python
n = int(input("entrez un entier :"))
u, v = 0,1
for k in range(n):
    u,v = v, u+v
print(u)
```

   (c) (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (1 pt), de polynôme caractéristique $x^2 - x - 1$. Ses deux racines sont ϕ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ Il existe donc deux constantes λ et μ telles que pour tout n :

$$u_n = \lambda\phi^n + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

   (1 pt) Or, $u_0 = \lambda + \mu = 0$ et $u_1 = \lambda\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$. On en déduit :

$$\lambda = -\mu \text{ et } \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

   Ainsi,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

   (1 pt)

   (d) D'après la question précédente, (u_n) ne s'annule pas donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est bien défini (1 pt) et vérifie pour tout n :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}}{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n} \\ &= \frac{\phi - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}\end{aligned}$$

   (2 pt) Puisque $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} < 0$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n \to 0$ et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \phi$ (1 pt)

   Ceci nous construit une suite simple à calculer qui converge vers ϕ : $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}\dots$

2. On se propose maintenant d'étudier indépendamment la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. On définit une suite (ϕ_n) par $\phi_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, \phi_{n+1} = 1 + \frac{1}{\phi_n} = f(\phi_n)$ où $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$

   (a) Par récurrence.
   - Initialisation : $\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{1} = 1 = \phi_1$
   - Hérédité : soit n un entier tel que $\phi_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Alors :

   $$\phi_{n+1} = 1 + \frac{1}{\phi_n} = 1 + \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} + u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$$

   et la récurrence est établie. (1 pt)

   (b) C'est-à-dire qu'on cherche a montrer que $f(\phi) = 1 + \frac{1}{\phi} = \phi$. En effet :

   $$1 + \frac{1}{\phi} = \frac{\phi + 1}{\phi} = \frac{\phi^2}{\phi} = \phi$$

   (1 pt) *Remarque : on peut aussi s'en sortir en utilisant $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, mais ça demande plus de travail.*

   (c) Commençons par observer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n \geq 1$ (par récurrence immédiate). (1 pt) f est une fonction dérivable sur $[1; +\infty[$ et pour tout $x \geq 1$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \in [-1; 0[$ (1 pt) i.e. $|f'(x)| \leq 1$ (1 pt)
   Ainsi, par inégalité des accroissements finis, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$|f(\phi_n) - f(\phi)| \leq |\phi_n - \phi|$$

   i.e. $|\phi_{n+1} - \phi| \leq |\phi_n - \phi|$, c'est-à-dire que la suite $(|\phi_n - \phi|)$ est décroissante. (1 pt)

   (d) On reprend la question précédente, mais on voudrait cette fois montrer $|f(\phi_n) - \phi| \leq \frac{1}{2}|\phi_n - \phi|$. En étudiant f', on remarque que ça correspond à : $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{2}$ i.e. $x \geq \sqrt{2}$. Or, pour $n \geq 2$, $\phi_n \geq \sqrt{2}$ (1 pt)(encore une récurrence ! si on veut l'écrire proprement. Puisque $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \geq \sqrt{2}$. On retient que très souvent pour étudier ces suites, on a besoin d'un encadrement de la suite !)
   Reprendre alors l'argumentaire de la question précédente, et faire la même récurrence qu'à la question précédente... (2 pt)

   (e) On déduit de la question précédente :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \phi - \frac{1}{2^{n-1}} \leq \phi_n \leq \phi + \frac{1}{2^{n-1}}$$

   (1 pt) Par théorème des gendarmes (1 pt), ϕ_n converge vers ϕ (1 pt). Or, à l'étape n, $\phi_n = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots\frac{1}{1+1}}}}$ avec n étages. (2 pt) À la limite, on peut donc écrire (avec des pincettes) :

   $$\phi = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$$

   On appelle ça un développement en fraction continue de ϕ. Et dans la première partie, on aurait pu être tenté·es d'écrire (avec la même précaution sur ce que ... veut dire) : $\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$)

Partie III - Une suite implicite (24 pts)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par la relation $f_n(x) = x^{2n+1} - x^{n+1} - 1$

1. f_n est polynomiale donc dérivable (1 pt) et :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n'(x) = (2n+1)x^{2n} - (n+1)x^n = x^n\left((2n+1)x^n - (n+1)\right)$$

   Ainsi, $f_n'(x)$ est du signe de $(2n+1)x^n - (n+1)$ c'est-à-dire positif si $x \geq \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{1/n}$ et négatif sinon. (1 pt) On notera $\alpha = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{1/n}$ pour simplifier le tableau de variations. Puisque f_n a un coeff. dominant positif, $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ (1 pt)

x	0		α		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	-1	$\searrow$	$f_n(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Puisque f_n est continue et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$, il existe par théorème des valeurs intermédiaires (1 pt) un unique réel x_n tel que $f_n(x_n) = 0$ avec $x_n \geq \alpha$. De plus, $f_n(1) = -1 < 0$ donc $x_n > 1$ (1 pt)

2. Comme indiqué par l'énoncé, regardons $f_{n+1}(x_n)$.

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_n) &= x_n^{2n+3} - x_n^{n+2} - 1 \\ &= x_n^2\left(x_n^{n+1} + 1\right) - x_n^{n+2} - 1 \\ &= x_n^2(x_n^{n+1} - x_n^n + 1) - 1 \end{aligned}$$

(1 pt) Or, puisque $x_n \geq 1$, $x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n(x_n - 1) \geq 0$ donc $x_n^{n+1} - x_n^n + 1 \geq 1$, $x_n^2(x_n^{n+1} - x_n^n + 1) \geq 1$ et enfin $f_{n+1}(x_n) \geq 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$ (1 pt). Par croissance de f_{n+1} sur $[1; +\infty[$, on en déduit $x_n \geq x_{n+1}$ et donc (x_n) est décroissante. (1 pt)

3. La suite (x_n) est décroissante et minorée par 1, donc d'après le théorème de la limite monotone, il existe $\ell \geq 1$ tel que $x_n \to \ell$ (1 pt)
Supposons par l'absurde $\ell > 1$ (1 pt). Alors pour un certain n, $x_n > 1$ et alors $x_n^{2n+1} - x_n^{n+1} = x_n^{n+1}(x_n^n - 1) \to +\infty$ (1 pt), ce qui implique $f_n(x_n) \to +\infty$, et entre en contradiction avec $f_n(x_n) = 0$ pour tout n (1 pt).
Ainsi, $x_n \to 1$. La deuxième partie en découle directement.
La deuxième partie de la question sert seulement à donner une indication dans les questions suivantes.

4. L'énoncé indique ici clairement qu'on utilisera le théorème de la bijection. h est une fonction polynômiale donc continue (1 pt), strictement croissante (1 pt) puisque pour tout $x \geq 1$, $h'(x) = 2x - 1 > 0$ et $h(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$, $h(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc d'après le théorème de la bijection (1 pt), h est bijective de $[1; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$ et h^{-1} est continue (1 pt) et strictement croissante de $[0; +\infty[$ vers $[1; +\infty[$ (1 pt)

5. Pour tout $n > 0$, $h(u_n) = u_n(u_n - 1) = x_n^n(x_n^n - 1) = x_n^{2n} - x_n^n$. Puisque $x_n(x_n^{2n} - x_n^n) = 1$, on en déduit $h(u_n) = \frac{1}{x_n}$. (1 pt) D'après la question 3, $h(u_n) \to 1$ (1 pt) et donc $u_n = h^{-1}(h(u_n)) \to h^{-1}(1)$ par continuité de h^{-1} (1 pt). Il reste à vérifier que $\phi = h^{-1}(1)$ i.e. $h(\phi) = 1$ (1 pt). Or,

$$h(\phi) = \phi(\phi - 1) = \phi^2 - \phi = 1 \text{par définition de } \phi$$

Ainsi, $u_n \to \phi$

Exercice 2 - Probas et matrices de Kac (CCP 2020 PSI) (30 pts)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux n boules numérotées de 1 à n. Le nombre de boules initialement contenues dans l'urne U_1 est une variable aléatoire notée N_0.

— À chaque instant entier $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit un des n numéros de façon équiprobable puis on change d'urne la boule portant ce numéro. Les choix successifs sont supposés indépendants.

— Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note N_k la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne U_1 après l'échange effectué à l'instant k.

— Exemple : supposons $n = 4$ et qu'à l'instant 0, l'urne U_1 contient les boules numérotées $1, 3, 4$ et l'urne U_2 la boule 2. Dans ce cas, $N_0 = 3$.

  — Si le numéro 3 est choisi à l'instant 1, on déplace la boule 3 et alors N_1 prend la valeur 2

  — Si le numéro 2 est choisi à l'instant 1, on déplace la boule 2 et alors N_1 prend la valeur 4

— Pour tout $\ell \in [|0; n|]$, on note $E_{k,\ell}$ l'événement $(N_k = \ell)$ et $p_{k,\ell} = \mathbb{P}(E_{k,\ell})$

— On note enfin $Z_k = \begin{pmatrix} p_{k;0} \\ p_{k;1} \\ \vdots \\ p_{k;n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ la matrice colonne qui contient la loi de la variable aléatoire N_k

1. La famille $(E_{k,0}; \ldots, E_{k,n})$ est un système complet d'événements. (2 pt)
On peut détailler un peu, mais il n'y a pas grand chose à dire : à l'étape k, l'urne 1 *contient un et un seul nombre de boules entre* 0 *et n.*

2. (a) Sachant que l'urne 1 contient $j-1$ boules (et donc l'urne 2 contient $n-j+1$ boules), la probabilité d'avoir j boules dans l'urne 1 à l'étape suivante est de tirer un numéro parmi les $n-j+1$ de l'urne 2. Puisque le nombre est tiré de manière uniforme, $\mathbb{P}_{E_{k,j-1}}(E_{k+1,j}) = \frac{n-j+1}{n}$ (1 pt)
   (b) Avec le même raisonnement, la probabilité d'avoir j boules sachant qu'il y en avait $j+1$ est de tirer un numéro parmi les $j+1$ contenues dans l'urne 1 donc $\mathbb{P}_{E_{k,j+1}}(E_{k+1,j}) = \frac{j+1}{n}$ (1 pt)
   (c) Puisqu'il n'y a pas d'autre option que de gagner ou perdre une boule à l'étape $k+1$, pour $\ell \notin \{j-1; j+1\}$, $\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,j}) = 0$ (1 pt)

3. D'après la question 1, $(E_{k;0}, \ldots, E_{k,n})$ est un système complet d'événements. (1 pt) D'après la loi des probabilités totales (1 pt), pour tout $j \in [|0; n|]$,

$$\mathbb{P}(E_{k+1;j}) = \sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}(E_{k;\ell})\mathbb{P}_{E_{k;\ell}}(E_{k+1,j})$$

(1 pt). D'après la question 2.c, $\mathbb{P}_{E_{k;\ell}}(E_{k+1;j}) = 0$ si $\ell \notin \{j-1; j+1\}$. (1 pt) En particulier, pour $j = 0$,

$$\mathbb{P}(E_{k+1;0}) = \mathbb{P}(E_{k;1})\mathbb{P}_{E_{k;1}}(E_{k+1;0}) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(E_{k;1})$$

De même pour $j = n$, $\mathbb{P}(E_{k+1,n}) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(E_{k,n-1})$ (1 pt)

4. On reprend l'écriture précédente avec $\mathbb{P}_{E_{k+1,\ell}}(E_{k;j}) = 0$ sauf pour $\ell = j-1$ et $\ell = j+1$ et on obtient :

$$\mathbb{P}(E_{k+1;j}) = \mathbb{P}(E_{k,j-1})\mathbb{P}_{E_{k,j-1}}(E_{k+1,j}) + \mathbb{P}(E_{k,j+1})\mathbb{P}_{E_{k,j+1}}(E_{k+1,j}) = \frac{n-j+1}{n}\mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n}\mathbb{P}(E_{k,j+1})$$

(2 pt)

5. Pour tout $j \in [|0; n|]$, le coefficient j de Z_{k+1} est $\mathbb{P}(E_{k+1,j})$. D'autre part, le coefficient j de $\frac{1}{n}A_n Z_k$ est :

$$\sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{n}(A_n)_{j,\ell}\mathbb{P}(E_{k,\ell})$$

Puisque $(A_n)_{j,\ell} = 0$ pour $\ell \notin \{j-1; j+1\}$, on retrouve l'écriture de la question précédente. (2 pt)

6. Montrons-le par récurrence. (1 pt)
   - Initialisation. Pour $k = 0$, $A_n^0 = I_{n+1}$ Ainsi, $\frac{1}{n^0} A_n^0 Z_0 = Z_0$ et la propriété est initialisée. (1 pt)
   - Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $Z_k = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0$. Alors,
$$Z_{k+1} = \frac{1}{n} A_n Z_k = \frac{1}{n} A_n \left(\frac{1}{n^k} A_n^k Z_0 \right) = \frac{1}{n^{k+1}} A_n A_n^k Z_0 = \frac{1}{n^{k+1}} A_n^{k+1} Z_0$$
     d'après les propriétés de calcul des matrices. Ainsi, la récurrence est établie. (2 pt)
   - Conclusion.
$$\forall k \in \mathbb{N}, Z_k = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0$$

7. On se place dans le cas $n = 2$.
   (a) Attention ! A_2 est bien une matrice 3×3 et pas 2×2. On a exactement :
$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   Un rapide calcul donne $A_2^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ puis $A_2^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 4A_2$ (1 pt) Alors, par récurrence :
   - $A_2^{2\times 0+1} = A_2 = 4^0 A_2$ (1 pt)
   - Pour tout k tel que $A_2^{2k+1} = 4^k A_2$,
$$A_2^{2(k+1)+1} = A_2^3 \times A_2^{2k} = 4A_2 \times A_2^{2k} = 4A_2^{2k+1} = 4 \times 4^k A_2 = 4^{k+1} A_2$$
     La récurrence est ainsi établie et la formule démontrée pour tout $k \in \mathbb{N}$. (2 pt)

   (b) On a déjà donné en question précédente une écriture de A_2^2. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$A_2^{2k} = A_2 \times A_2^{2k-1} = A_2 \times 4^{k-1} A_2 = 4^{k-1} A_2^2$$
   d'après la question précédente. (2 pt)

   (c) Pour tout k, on a donc $Z_{2k} = \frac{1}{2^{2k}} \times 4^{k-1} A_2^2 Z_0 = \frac{1}{4} A_2^2 Z_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} Z_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \\ b \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \end{pmatrix}$
   et :
$$Z_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}} 4^k A_2 Z_0 = \frac{1}{2} A_2 Z_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} Z_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b \\ a + c \\ \frac{1}{2}b \end{pmatrix}$$
   (3 pt)

   (d) Ainsi, pour k pair supérieur ou égal à 2, $E(N_k) = 0 \times \mathbb{P}(N_k = 0) + 1 \times \mathbb{P}(N_k = 1) + 2 \times \mathbb{P}(N_k = 2) = a + b + c = 1$ et pour k impair, $E(N_k) = 0 \times \mathbb{P}(N_k = 0) + 1 \times \mathbb{P}(N_k = 1) + 2 \times \mathbb{P}(N_k = 2) = a + c + b = 1$ (2 pt)
   Il reste le cas $k = 0$, où $E(N_k) = b + 2c$. (1 pt)
   Il est assez étonnant ici que l'espérance soit toujours 1*, indépendamment des conditions initiales. Ce n'est pas le cas pour* $n \geq 3$.

Exercice 3 - Sommes et binômiaux : une formule d'inversion (28 pts)

1. Compléter le code suivant pour que la fonction `binomial(p,q)` calcule $\binom{p}{q}$:

```python
def factorielle(n):
    res = 1
    for k in range(1,n+1):
        res = res*k
    return res
def binomial(p,q):
    if 0 <= q <= p :
        return factorielle(p)/(factorielle(q)*factorielle(p-q))
```

2. Plutôt que de calculer trois factorielles en commençant à 1, on se propose de stocker les résultats de toutes les factorielles dans une liste `lf` (pour «liste factorielles»). Compléter le code suivant.

```python
def binomial(p,q):
    lf = [1]
    for k in range(1,p+1):
        lf.append(lf[-1]*k) # ou lf[k]*k
    if 0 <= q <= p:
        return lf[p]/(lf[q]*lf[p-q])
```

3. Cette écriture a du sens dès lors que $k \leq q \leq p$, $k \leq p$ et $q-k \leq p-k$, i.e. $q \leq p$. Il y a donc une seule condition : $\boxed{k \leq q \leq p}$ (1 pt). Sous ces conditions, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\binom{p}{q}\binom{q}{k} &= \frac{p!}{q!(p-q)!}\frac{q!}{k!(q-k)!} \\ &= \frac{p!}{(p-q)!k!(q-k)!} \\ &= \frac{p!(p-k)!}{((p-k)-(q-k))!k!(p-k)!(q-k)!} \\ &= \binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k}\end{aligned}$$

(2 pt)

4. D'après la question précédente (1 pt),

$$\begin{aligned}\sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p}{q}\binom{q}{k} &= \sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k} \\ &= \binom{p}{k}\sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p-k}{q-k} \\ &= \binom{p}{k}\sum_{j=0}^{p-k}(-1)^{j+k}\binom{p-k}{j} \text{ en posant } j=q-k \text{ (1 pt)} \\ &= \binom{p}{k}(-1)^k\sum_{j=0}^{p-k}(-1)^j\binom{p-k}{j} \\ &= \binom{p}{k}(-1)^k(1-1)^{p-k} \text{ par binôme de Newton (1 pt)} \\ &= 0 \text{ si } p-k \neq 0 \text{ et } (-1)^p \text{ si } p=k \text{ (1 pt)}\end{aligned}$$

5. Soit $p \in [|0; n|]$ (1 pt).

$$\begin{aligned}
(-1)^p \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} b_k &= (-1)^p \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_j \\
&= (-1)^p \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=j}^{p} (-1)^k \binom{p}{k}\binom{k}{j} a_j \\
&= (-1)^p \sum_{j=0}^{p} a_j \sum_{k=j}^{p} (-1)^k \binom{p}{k}\binom{k}{j} \\
&= (-1)^p \sum_{j=0}^{p} a_j \delta_j^p (-1)^p \text{ d'après la question précédente} \\
&= (-1)^p (-1)^p a_p \\
&= a_p \text{ car } (-1)^{2p} = 1
\end{aligned}$$

(3 pt)

Cette propriété s'appelle formule d'inversion de Pascal.

6. **Application** (si vous avez déjà bien avancé le reste du sujet).
Notons $S_{p,n}$ le nombre de *surjections* d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.
   (a) n^p (cf. chapitre 2) (2 pt)
   (b) Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités pour les k éléments qui ont des antécédents. Chacune de ces applications peut être réduite sans changement en une surjection de $[|1; p|]$ vers son ensemble image à k éléments : il y a donc $S_{p;k}$ possibilités. On obtient donc $\binom{n}{k} S_{p,k}$ possibilités au total (2 pt)
   (c) Chacune des applications de $[|1; p|]$ vers $[|1; n|]$ a un (unique) nombre k d'images. En regroupant ces applications selon k, on obtient :
$$n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{p,k}$$
(2 pt)
   (d) On applique la formule de la question 3 avec $b_n = n^p$ et $a_k = S_{p,k}$ (1 pt), on obtient :
$$S_{p,n} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p$$
(2 pt)