Devoir surveillé n°4 du 7 février

Calculatrice interdite. Tous les résultats doivent être soigneusement justifiés, que l'énoncé le précise ou non. La présentation et la rédaction sont centrales dans l'appréciation d'une copie. Le barême est indicatif et peut être modifié.

Check-list avant de rendre la copie :

- ☐ Copie tenue bras tendu : on voit les changements d'exercices et de questions.
  Pour ce faire, sauter une ligne entre les questions, encadrer les noms des exercices.
- ☐ Copie tenue bras tendu : copie aérée et lisible.
  Mettre une marge si il n'y en a pas sur la feuille, sauter des lignes si besoin, soigner la calligraphie (si besoin, écrire plus gros, sur les lignes, changer de stylo), éviter les longs paragraphes : aller à l'argument principal.
- ☐ Pages numérotées et rangées dans l'ordre.
- ☐ Exercices et questions numérotées.
- ☐ Résultats encadrés.
  À la règle, et sans surligneur.
- ☐ Phrases réponses, noms de théorèmes soulignés.
- ☐ Pas ou peu de ratures.
  Si c'est le cas, barrer proprement la question concernée, la séparer du reste du texte par deux lignes horizontales et recommencer proprement. Penser à utiliser un brouillon pour les calculs !
- ☐ Variables introduites par "soit" (quand c'est nécessaire).
  Par exemple, f ou (u_n) sont en général des variables introduites dans l'énoncé alors que x, n ne le sont pas. Les variables muettes utilisées dans une phrase quantifiée, les variables de sommation, n'ont pas besoin d'être introduites par "soit".
- ☐ Syntaxe et orthographe correctes.
  Faire en particulier attention aux mots "mathématiques" (noms de mathématiciens dans les théorèmes, termes techniques comme "asymptote", "dérivabilité"...)
- ☐ Modes de raisonnements / étapes indiquées.
  On ne ré-écrit pas l'énoncé, mais on précise "montrons maintenant que (...)", "étudions la limite de (...)" et "raisonnons par analyse-synthèse/l'absurde/récurrence/double implication..."

Exercice 1 - Algèbre linéaire : questions de cours et résultats théoriques

Soient E, F, G des espaces vectoriels et $f : E \to F, g : F \to G$ deux applications linéaires.

1. Soit $a \in E, b \in F$. Compléter : $a \in \mathrm{Ker}(f) \iff \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ et $b \in \mathrm{Im}(f) \iff \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F
4. Montrer : $g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$
5. Soit $\mathcal{C} = (u_1, u_2)$ une base de F telle que $g(u_1) = u_1, g(u_2) = -u_2$. Montrer : $g \circ g \circ g = g$
6. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E telle que $f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_3$ et $f(e_3) = e_1$. Montrer : $f \circ f \circ f = id_E$

Exercice 2 - Algèbre linéaire : matrices

Dans la suite, on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de taille $n \times n$. Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : M \mapsto ({}^t A)M + MA$.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f(M)$ est antisymétrique.
3. En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
4. Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer $f(J)$ et l'exprimer comme combinaison linéaire de J et L.

   (c) On exécute le programme suivant :

```python
import numpy as np
A = np.matrix([[0,0,1],[0,-1,0],[0,0,0]])
K = np.matrix([[0,0,1],[0,0,0],[-1,0,0]])
L = np.matrix([[0,0,0],[0,0,1],[0,-1,0]])
def fonction_DS(M):
    return np.transpose(A).dot(M) + M.dot(A)
print(fonction_DS(K))
print(fonction_DS(L))
```

   On obtient l'affichage suivant :

```
[[0 0 0]
 [0 0 0]
 [0 0 0]]
[[ 0  0  0]
 [ 0  0 -1]
 [ 0  1  0]]
```

   Que peut-on en déduire ?
   (d) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$.

Exercice 3 - EDHEC 2008

Partie I - Sommes de Riemann - une démonstration

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.

1. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in [0;1]$, $|f'(x)| \leq M$. En déduire que pour tout $(x,y) \in [0;1]^2$:
$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$$
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\forall k \in [|0;n-1|], \forall t \in \left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right], \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M\left(t - \frac{k}{n}\right)$$
3. En déduire :
$$\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n^2}$$
4. En sommant, établir :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n}$$
5. Conclure :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)dt$$
6. Recopier et compléter le code suivant pour calculer une valeur approchée de $\int_0^1 f(t)dt$. On suppose qu'on a une fonction `f` qui prend en entrée un flottant `x` et renvoie un flottant `f(x)` :

```
def integrale_rectangles(f, n):
    s = ....................
    for k in range(...............):
        s = ....................
    return ................
```

Partie II - Une famille d'intégrales

Pour tout couple (p,q) d'entiers, on pose :
$$I(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$$

1. Compléter le code suivant pour demander une valeur de p, q à l'utilisateur et calculer une valeur approchée de $I(p,q)$:

```
p = ....................
q = ....................
def f(x):
    ................................
print(...............................)
```

On pourra utiliser la fonction `integrale_rectangles` de la partie précédente

2. Montrer :
$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, I(p,q) = \frac{q}{p+1}I(p+1,q-1)$$

3. Par récurrence sur q, en déduire :

$$\forall(p,q) \in \mathbb{N}^2, I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q,0)$$

4. Déterminer $I(p+q,0)$, et montrer finalement :

$$\forall(p,q) \in \mathbb{N}^2, I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

5. En déduire un programme Python qui implémente une fonction `I(p,q)` qui renvoie la valeur de $I(p,q)$
Le programme pourra implémenter également une fonction `factorielle(k)` puis y faire appel.

Partie III - Application à une suite de variables aléatoires.

Soit $m \geq 2$. On considère une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n>1}$ définies sur le même ensemble probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ telles que pour tout $n \geq 1, U_n$ suit une loi uniforme sur $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\}$. On considère également une suite de variables aléatoires (X_n) définies sur Ω telles que pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in [|0; n-1|]$, la loi de X_n sachant $U_n = \frac{k}{n}$ est la loi binômiale $\mathcal{B}(m, \frac{k}{n})$.

1. Écrire un code Python permettant de demander un entier n et simuler la variable aléatoire U_n. On pourra supposer que le module `random` a été importé sous le nom rd et utiliser la fonction `rd.random`
2. On considère une variable aléatoire Y suivant une loi binômiale $\mathcal{B}(m,p)$. Rappeler la valeur de l'espérance de Y, puis montrer :

$$E(Y(Y-1)) = m(m-1)p^2$$

3. Déterminer la loi de X_1.
Dans toute la suite, on suppose $n \geq 2$.
4. (a) Déterminer $X_n(\Omega)$
   (b) Montrer que pour tout $i \in X_n(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(X_n = i) = \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

   On pourra faire appel au système complet d'événements associé à U_n.
   (c) En utilisant la première question de la partie, déterminer sans calculs la valeur de :

$$\sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

   En déduire : $E(X_n) = \frac{m(n-1)}{2n}$
   (d) En utilisant toujours la première question, donner sans calculs la valeur de :

$$\sum_{i=1}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

   En déduire :

$$E(X_n(X_n-1)) = \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

   (e) En déduire finalement :

$$V(X_n) = \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}$$

5. (a) En utilisant les résultats des parties précédentes, montrer que pour tout $i \in X_n(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X_n = i) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{m+1}$$

   (b) Reconnaître la loi limite obtenue. Soit X une v.a. suivant cette loi. Vérifier que $E(X_n) \to E(X)$ et $V(X_n) \to V(X)$
   On pourra utiliser les espérances et variances connues de $X+1$