Devoir surveillé n°4 du 7 février - Corrigé

Exercice 1 - Algèbre linéaire : questions de cours et résultats théoriques

Soient E, F, G des espaces vectoriels et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications linéaires.

1. $a \in \text{Ker}(f) \iff f(a) = 0$ et $b \in \text{Im}(f) \iff \exists x \in E, b = f(x)$ (1 pt)
2. **C'est une démo de cours.** On sait que $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in \ker(f)$ (1 pt). Soient $x, y \in \text{Ker}(f)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, par linéarité de f,
$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$$
On en déduit : $\lambda x + \mu y \in \ker(f)$.(1 pt) Ainsi, $\ker(f)$ est stable par combinaisons linéaires, donc c'est un sous-espace vectoriel de E.
3. **Idem**. Puisque $f(0_E) = 0_F$, $0_F \in \text{im}(f)$ (1 pt). Par ailleurs, pour tous $y, y' \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, notons $y = f(x)$ et $y' = f(x')$ avec $x, x' \in E$. On a alors :
$$\lambda y + \mu y' = \lambda f(x) + \mu f(x') = f(\lambda x + \mu x') \in \text{im}(f)$$
Ainsi, $\text{im}(f)$ est stable par combinaisons linéaires, c'est un sous-espace vectoriel de F.(1 pt)
4. Raisonnons par double implication.(1 pt)
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $g \circ f = 0$. Soit $y \in \text{im}(f)$. Par définition, il existe $x \in E, y = f(x)$.(1 pt) Alors, $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 0$. On en déduit : $y \in \ker(g)$.(1 pt) Ainsi, $\underline{\text{im}(f) \subset \ker(g)}$
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\text{im}(f) \subset \ker(g)$. Montrons $g \circ f = 0$,i.e. : $\forall x \in E, g(f(x)) = 0$. Soit donc $x \in E$. Alors, $f(x) \in \text{im}(f)$.(1 pt) On en déduit par hypothèse : $f(x) \in \ker(g)$, c'est-à-dire : $g(f(x)) = 0$.(1 pt) On a donc <u>montré l'implication réciproque.</u>
5. Soit $x \in F$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $x = au_1 + bu_2$. (1 pt) Alors :
$$\begin{aligned}(g \circ g \circ g)(x) &= g(g(g(x)))\\ &= g(g(g(au_1 + bu_2)))\\ &= g(g(ag(u_1) + bg(u_2)))\\ &= g(g(au_1 - bu_2))\\ &= g(ag(u_1) - bg(u_2))\\ &= g(au_1 - b(-u_2))\\ &= g(au_1 + bu_2)\\ &= g(x)\end{aligned}$$
(2 pt) Ainsi, $g(g(g(x))) = g(x)$ donc $g \circ g \circ g = g$
6. Avec le même raisonnement : soit $x \in E$. Puisque (e_1, e_2, e_3) est une base de E, il existe a, b, c des réels tels que $x = ae_1 + be_2 + ce_3$.(1 pt) On déduit :
$$\begin{aligned}(f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x)))\\ &= f(f(f(ae_1 + be_2 + ce_3)))\\ &= f(f(af(e_1) + bf(e_2) + cf(e_3)))\\ &= f(f(ae_2 + be_3 + ce_1))\\ &= f(af(e_2) + bf(e_3) + cf(e_1))\\ &= f(ae_3 + be_1 + ce_2)\\ &= af(e_3) + bf(e_1) + cf(e_2)\\ &= ae_1 + be_2 + ce_3\\ &= x\end{aligned}$$
(2 pt) Donc $f(f(f(x))) = x = id_E(x) : f \circ f \circ f = id_E$

Exercice 2 - Algèbre linéaire : matrices

Dans la suite, on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de taille $n \times n$. Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : M \mapsto ({}^tA)M + MA$.

1. En posant M la matrice nulle de taille $n \times n$, ${}^tM = 0 = -0 = -M$ donc $0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.(1 pt) Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors,

$$ {}^t(\lambda A_1 + \mu A_2) = \lambda {}^tA_1 + \mu {}^tA_2 = \lambda(-A_1) + \mu(-A_2) = -(\lambda A_1 + \mu A_2) $$

   Ainsi, $\lambda A_1 + \mu A_2 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, qui est donc un ensemble stable par combinaisons linéaires qui contient 0 : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.(1 pt)
   On peut aussi dire que c'est $\ker\left(M \mapsto {}^tM + M\right)$

2. Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Calculons ${}^tf(M)$: (1 pt)

$$ \begin{aligned} {}^tf(M) &= {}^t\left(({}^tA)M + MA\right) \\ &= {}^t\left(({}^tA)M\right) + {}^t(MA) \\ &= {}^tMA + {}^t\, A {}^tM \\ &= -MA - {}^tAM \\ &= -({}^tAM + MA) \\ &= -f(M) \end{aligned} $$

   (2 pt) Ainsi, $f(M)$ est asymétrique.

3. On en déduit que f peut être définie de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.(1 pt) Vérifions qu'elle est linéaire : si $M_1, M_2 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$ \begin{aligned} f(\lambda M_1 + \mu M_2) &= ({}^tA)(\lambda M_1 + \mu M_2) + (\lambda M_1 + \mu M_2)A \\ &= \lambda {}^tAM_1 + \mu {}^tAM_2 + \lambda M_1 A + \mu M_2 A \\ &= \lambda\left({}^tAM_1 + M_1A\right) + \mu\left({}^tAM_2 + M_2A\right) \\ &= \lambda f(M_1) + \mu f(M_2) \end{aligned} $$

   (2 pt) f est bien un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

4. Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Si M est une matrice antisymétrique, alors elle est de la forme

$$ M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = aJ + bK + cL $$

   (1 pt) Donc (J, K, L) est une famille génératrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.(1 pt) Si $aJ + bK + cL = 0$, alors on a immédiatement :

$$ \begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \end{cases} $$

   (1 pt) Ainsi, (J, K, L) est une famille libre.

(b) $f(J) =^t AJ + JA$:

$$\begin{aligned}
f(J) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -J - L
\end{aligned}$$

(2 pt)

(c) On déduit : $f(K) = 0$ et $f(L) = -L$. (1 pt)

(d) Pour tout $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, il existe a, b, c tels que $M = aJ + bK + cL$. Alors, (1 pt)

$$\begin{aligned}
f(M) &= f(aJ + bK + cL) \\
&= af(J) + bf(K) + cf(L) \\
&= a(-J - L) + b \times 0 - cL \\
&= (-a)J + (-a - c)L \\
&\in \text{Vect}(J, L)
\end{aligned}$$

(2 pt) Puisque (J, K, L) est libre, la sous-famille (J, L) est libre et c'est donc une base de $\text{Im}(f)$ (1 pt)

Exercice 3 - EDHEC 2008

Partie I - Sommes de Riemann - une démonstration

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$.

1. Puisque $f \in \mathcal{C}^1([0; 1])$, $f' \in \mathcal{C}^0([0; 1])$(1 pt) et par théorème des bornes(1 pt), il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in [0; 1]$, $|f'(x)| \leq M$.(1 pt) En utilisant l'inégalité des accroissements finis,(1 pt) on en déduit que pour tout (x, y) :
$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [|0; n-1|]$ et $t \in [\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}]$. On vérifie aisément que $\frac{k}{n}$ et t sont dans $[0; 1]$.(1 pt) Appliquons donc la propriété précédente à $y = \frac{k}{n}$ et $x = t$(1 pt) :
$$|f(t) - f(\frac{k}{n})| \leq M|t - \frac{k}{n}|$$
Pour $t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$, $k \geq \frac{k}{n}$ donc on peut remplacer : $\left|t - \frac{k}{n}\right| = \left(t - \frac{k}{n}\right)$(1 pt) et on obtient l'inégalité demandée.

3. Intégrons l'inégalité précédente sur $[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}]$: (1 pt)

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| &= \left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt - \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dt\right| \text{(1 pt)}\\
&= \left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dt\right|\\
&\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| dt \text{ par inégalité triangulaire intégrale (1 pt)}\\
&\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} M\left(t-\frac{k}{n}\right)dt \text{ d'après la question précédente (1 pt)}\\
&\leq M\left[\frac{t^2}{2} - \frac{k}{n}\left(t-\frac{k}{n}\right)\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\\
&\leq M\left(\frac{(k+1)^2}{2n^2} - \frac{k}{n}\times\frac{1}{n} - \frac{k^2}{2n^2}\right)\\
&\leq \frac{M}{2n^2} \text{(2 pt)}
\end{aligned}$$

puisque $(k+1)^2 - 2k - k^2 = 1$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par relation de Chasles (1 pt),

$$\int_0^1 f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \text{ par linéarité (1 pt)}\\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \text{ par inégalité triangulaire (1 pt)}\\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{2n^2} \text{ d'après la question précédente (1 pt)}\\
&\leq \frac{M}{2}\times n \times \frac{1}{n^2}\\
&\leq \frac{M}{2n} \text{(1 pt)}
\end{aligned}$$

5. Puisque $\frac{M}{2n} \to 0$ quand $n \to +\infty$, par théorème des gendarmes (1 pt),

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)dt$$

(1 pt)

6.
```python
def integrale_rectangles(f,n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + f(k/n)
    return s/n
```

(3 pt)

Partie II - Une famille d'intégrales

Pour tout couple (p, q) d'entiers, on pose :

$$I(p, q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$$

1. Compléter le code suivant pour demander une valeur de p, q à l'utilisateur et calculer une valeur approchée de $I(p, q)$:

```python
p = int(input("entrez un entier p"))
q = int(input("entrez un entier q"))
def f(x):
    return x**p*(1-x)**q
print(integrale_rectangles(f,n))
```

(3 pt)

2. $x \mapsto x^{p+1}$ et $x \mapsto (1-x)^q$ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$.(1 pt) En intégrant par parties(1 pt), on obtient :

$$\begin{aligned} I(p, q) &= \int_0^1 x^p(1-x)^q dx \\ &= \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^q\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1} \times (-q)(1-x)^{q-1} dx \\ &= 0 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1} dx \\ &= \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1) \end{aligned}$$

(2 pt)

3. Posons pour tout $q \in \mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{P}(q) : \forall p \in \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$. Montrons que $\mathcal{P}(q)$ est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$ par récurrence.(1 pt)
   — Initialisation : pour $q = 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$I(p, q) = I(p, 0) = \frac{p!0!}{(p+0)!} I(p+0, 0)$$

   La propriété est donc initialisée.(1 pt)
   — Hérédité : soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(q)$ soit vraie. Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} I(p, q+1) &= \frac{q+1}{p+1} I(p+1, q) \text{ d'après la question 2(1 pt)} \\ &= \frac{q+1}{p+1} \times \frac{(p+1)!q!}{(p+1+q)!} I(p+1+q, 0) \text{ par hypothèse de récurrence(1 pt)} \\ &= \frac{p!(q+1)!}{(p+q+1)!} I(p+q+1, 0) \end{aligned}$$

   et la récurrence est établie. La propriété est donc vraie pour tout $q \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}^2$,

$$I(p+q,0) = \int_0^1 x^{p+q}dx = \left[\frac{x^{p+q+1}}{p+q+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$$

(1 pt) Avec la propriété de la question précédente, on conclut :

$$I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!}I(p+q,0) = \frac{p!q!}{(p+q)!}\frac{1}{p+q+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

(1 pt)

5.
```
def factorielle(k):
    res = 1
    for i in range(1,k+1):
        res = res*i
    return res
def I(p,q):
    return factorielle(p)*factorielle(q)/factorielle(p+q+1)
```

(4 pt)

Partie III - Application à une suite de variables aléatoires.

Soit $m \geq 2$. On considère une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geq 1}$ définies sur le même ensemble probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ telles que pour tout $n \geq 1$, U_n suit une loi uniforme sur $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\}$. On considère également une suite de variables aléatoires (X_n) définies sur Ω telles que pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in [|0; n-1|]$, la loi de X_n sachant $U_n = \frac{k}{n}$ est la loi binômiale $\mathcal{B}(m, \frac{k}{n})$.

1.
```
n = int(input("entrez un entier n"))
x = rd.random()
print(int(n*x)/n)
```

On pourrait aussi en faire une fonction via :

```
n = int(input("entrez un entier n"))
def U(n):
    x = rd.random()
    return int(n*x)/n
print(U(n))
```

(3 pt)

2. D'après le cours, $E(Y) = mp$ (1 pt) Utilisons dans un second temps le théorème de transfert(1 pt) :

$$\begin{aligned}
E(Y(Y-1)) &= \sum_{k=0}^{m} k(k-1)\mathbb{P}(Y=k) \\
&= \sum_{k=0}^{m} k(k-1)\binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k} \text{(1 pt)} \\
&= m(m-1)\sum_{k=2}^{m}\binom{m-2}{k-2}p^k(1-p)^{m-k} \text{(1 pt)} \\
&= m(m-1)\sum_{j=0}^{m-2}\binom{m-2}{j}p^{j+2}(1-p)^{m-2-j} \text{en posant } j = k-2 \text{ (1 pt)} \\
&= m(m-1)p^2\sum_{j=0}^{m-2}\binom{m-2}{j}p^{j}(1-p)^{m-2-j} \\
&= m(m-1)p^2(p+(1-p))^{m-2} \text{ d'après la formule du binôme de Newton(1 pt)} \\
&= m(m-1)p^2
\end{aligned}$$

3. En reprenant l'énoncé. Pour $n = 1$, (U_n) suit une loi uniforme sur $\{0; \ldots, \frac{1-1}{1}\}$. C'est-à-dire : U_n suit une loi uniforme sur $\{0\}$, ou encore : U_n est une variable aléatoire certaine égale à 0(1 pt).
Alors, X_1 suit une loi binômiale de paramètres m et $\frac{0}{n} = 0$: X_1 est aussi la variable aléatoire certaine égale à 0.(1 pt)

4. (a) Puisque quelle que soit la valeur de U_n, X_n est une variable aléatoire suivant une loi binômiale de paramètres m et un certain $\frac{k}{n}$, $X_n(\Omega) = [|0; m|]$.(1 pt)

   (b) Comme l'indique l'énoncé, $(U_n = \frac{k}{n})_{k\in[|0;n-1|]}$ est un système complet d'événements, et on peut donc appliquer dans ce s.c.e. la loi des probabilités totales(1 pt) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = i) &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}\left(U_n = \frac{k}{n} \cap X_n = i\right) \text{(1 pt)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}\left(U_n = \frac{k}{n}\right) \times \mathbb{P}_{U_n=\frac{k}{n}}(X_n = i) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n} \times \mathbb{P}_{U_n=\frac{k}{n}}(X_n = i) \text{ car } U_n \text{ est uniforme(1 pt)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n} \times \binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \quad \text{car } X_n \text{ binômiale de paramètre } \frac{k}{n} \text{ (1 pt)} \\
&= \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \quad \text{par linéarité de la somme}
\end{aligned}$$

   (c) Cette somme est l'espérance d'une variable aléatoire binômiale de paramètres m et $\frac{k}{n}$. On en déduit :

$$\sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} = \frac{mk}{n}$$

(2 pt) Or,

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \sum_{i=0}^{m} i\mathbb{P}(X_n = i) \text{(1 pt)} \\
&= \sum_{i=0}^{m} i \times \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \quad \text{en inversant les deux sommes(1 pt)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{mk}{n} \quad \text{d'après le début de la question(1 pt)} \\
&= \frac{m}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k \\
&= \frac{m}{n^2} \times \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{m(n-1)}{2n} \text{(1 pt)}
\end{aligned}$$

(d) On reprend le même raisonnement. Cette somme est exactement l'espérance de $X(X-1)$ où X suit une loi binômiale de paramètres m et $\frac{k}{n}$ et vaut donc $m(m-1)\left(\frac{k}{n}\right)^2$.(2 pt)
Alors,

$$\begin{aligned}
E(X_n(X_n-1)) &= \sum_{i=0}^{m} i(i-1)\mathbb{P}(X_n = i) \text{(1 pt)} \\
&= \sum_{i=0}^{m} i(i-1)\frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \quad \text{en inversant les sommes (1 pt)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \quad \text{(1 pt)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} m(m-1)\left(\frac{k}{n}\right)^2 \\
&= \frac{m(m-1)}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\
&= \frac{m(m-1)}{n^3} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2} \text{(1 pt)}
\end{aligned}$$

(e) D'après la formule de Koenig-Huygens, (1 pt)

$$\begin{aligned}
V(X_n) &= E(X_n^2) - E(X_n)^2 \\
&= E(X_n(X_n-1)) + E(X_n) - E(X_n)^2 \text{ par linéarité de l'espérance (1 pt)} \\
&= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2} + \frac{m(n-1)}{2n} - \left(\frac{m(n-1)}{2n}\right)^2 \text{ d'après les questions précédentes (1 pt)} \\
&= \frac{2m(m-1)(n-1)(2n-1) + 6nm(n-1) - 3m^2(n-1)^2}{12n^2} \\
&= \frac{m(n-1)\left(2(m-1)(2n-1) + 6n - 3m(n-1)\right)}{12n^2} \\
&= \frac{m(n-1)\left(4mn - 4n - 2m + 2 + 6n - 3mn + 3m\right)}{12n^2} \\
&= \frac{m(n-1)\left(mn + 2n + m + 2\right)}{12n^2} \\
&= \frac{m(n-1)(n+1)(m+2)}{12n^2} \\
&= \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}
\end{aligned}$$

(2 pt) pour l'ensemble du calcul

5. (a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = i) &= \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \\
&= \binom{m}{i} \times \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ où } f : x \mapsto x^i(1-x)^{m-i} \text{ (1 pt)}
\end{aligned}$$

D'après le théorème des sommes de Riemann (1 pt) (démontré en partie I), cette somme converge quand $n \to +\infty$ vers

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^i(1-x)^{m-i}dx = I(i, m-i) = \frac{i!(m-i)!}{(m-i+i+1)!} = \frac{i!(m-i)!}{(m+1)!} \text{(2 pt)}$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(X_n = i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{i!(m-i)!}{(m+1)!}\binom{m}{i} = \frac{i!(m-i)!m!}{(m+1)!i!(m-i)!} = \frac{m!}{(m+1)!} = \frac{1}{m+1} \text{(1 pt)}$$

(b) On reconnaît dans : $\forall i \in [|0;m|], \mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{m+1}$ la loi d'une variable aléatoire uniforme sur $[|0;m|]$(1 pt), et donc $X+1$ est uniforme sur $[|1;m+1|]$ (1 pt). On sait donc :

$$E(X+1) = \frac{m+1+1}{2} = \frac{m+2}{2}$$

(1 pt) donc $E(X) = \frac{m+2}{2} - 1 = \frac{m}{2}$ (1 pt)

$$V(X+1) = \frac{(m+1)^2-1}{12}$$

(1 pt) donc $V(X) = V(X+1) = \frac{(m+1)^2-1}{12} = \frac{m^2+2m+1-1}{12} = \frac{m(m+2)}{12}$ (1 pt)
Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \frac{m(n-1)}{2n} \\
&= \frac{n \times m(1-\frac{1}{n})}{n \times 2} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{m}{2} = E(X) \text{(1 pt)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V(X_n) &= \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2} \\
&= \frac{m(m+2)n^2 \times (1-\frac{1}{n^2})}{n^2 \times 12} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{m(m+2)}{12} = V(X) \text{(1 pt)}
\end{aligned}
$$