Petits exercices de calcul et d'analyse

Exercice 1 (Ensembles etc.)**.**

1. Lister tous les éléments des ensembles :
   (a) $A = \{n \in \mathbb{N} | \sqrt{2} \leqslant n \leqslant \sqrt{11}\} = \{2; 3\}$
   (b) $B = \{x \in \mathbb{Q} | \exists (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, x = \frac{n}{p} \text{ et } 1 \leqslant n \leqslant 2p \leqslant 7\}$
   $B = \{\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{1}; \frac{2}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{1}; \frac{3}{2}; \frac{3}{3}; \dots, \frac{7}{1}; \frac{7}{2}; \frac{7}{3}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}\}$
   (c) $C = \{p^2 | p \in [|2; 15|], p \text{ est premier}\} = \{4; 9; 25; 49; 121; 169\}$
2. Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 4x - y = 1\}$ et $C = \{(t+1, 4t+3); t \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que A=C.
   Par double inclusion.
   - $\boxed{\subset}$ Soit $(x,y) \in A$. En posant $t = x-1$, on a $(x,y) = (t+1, 4t+3)$ puisque : $t+1 = (x-1)+1 = x$ et $4t+3 = 4(x-1)+3 = 4x-1 = y$ par hypothèse. Ainsi, $(x,y) \in C$ et donc $A \subset C$
   - $\boxed{\supset}$ Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrons que $(t+1, 4t+3) \in A$:
   $$4(t+1) - (4t+3) = 4t + 4 - 4t - 3 = 1$$
   Ainsi, $C \subset A$.

Exercice 2 (Injectivité, surjectivité, bijectivité)**.**

1. La fonction $f : \mathbb{R} \backslash \{3\} \to \mathbb{R}$ représentée par le tableau de variations ci-dessous est-elle injective ? surjective ? bijective ? donner son ensemble image.

x	$-\infty$		-5		-3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2 ‖	$\longrightarrow$	-2 ‖ 2	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction n'est pas injective puisque par exemple $f(-5) = f(-4) = -2$ et par ailleurs elle n'est pas surjective puisque 0 n'a pas d'antécédent. En particulier, f n'est pas bijective. L'image de f est $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$

2. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto 2n$
   injective, non surjective
   (b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto -n$
   injective et surjective donc bijective
   (c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1$
   injective, non surjective puisque l'image est $\mathbb{N}^*$
   (d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n+1$
   bijective
   (e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (2x+y, 2x-y)$
   bijective
   (f) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x,y,z) \mapsto (x+y, 2x-y+3z)$
   surjective, non injective
   (g) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (2x-3y+z, x+2z, 3x-3y+3z)$
   non surjective, non injective
3. Dans la question précédente, si certaines applications sont bijectives, déterminer leur réciproque.
   Dans la question b, f est bijective et sa réciproque est elle-même. Dans la question d, la réciproque de f est $n \mapsto n-1$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Enfin, dans la question e, la réciproque de f est :
   $$(a,b) \mapsto \left(\frac{1}{4}(a+b), \frac{1}{2}(a-b)\right)$$
4. Déterminer la réciproque de l'application $f(x) = e^{2x} + e^x$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
   On admet ici que f est bijective. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Cherchons x tel que $y = f(x) = e^{2x} + e^x$. Posons $X = e^x$. L'équation se réécrit :
   $$y = X^2 + X$$

C'est une équation polynômiale du second degré d'inconnue X, de discriminant $1+4y>0$. Les racines sont donc $\frac{1-\sqrt{1+4y}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{1+4y}}{2}$. Or, pour $y>0, 1+4y>1$ donc $1-\sqrt{1+4y}$ est négatif et ne peut donc pas être égal à e^x. On en déduit $X=\frac{1+\sqrt{1+4y}}{2}$ et avec $x=\ln(X)$:

$$f^{-1}(y)=\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+4y}}{2}\right)$$

Exercice 3 (Sommes doubles)**.** Calculer les sommes suivantes.

1. $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(i^k)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(i^k) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}k\ln(i)\\ &= \left(\sum_{k=1}^{n}k\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(i)\right)\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\times\ln\left(\prod_{i=1}^{n}i\right)\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\times\ln(n!)\end{aligned}$$

2. $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}ij\\ &= \sum_{j=1}^{n}j\sum_{i=1}^{j}i\\ &= \sum_{j=1}^{n}j\times\frac{j(j+1)}{2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^3+j^2)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{3n^2(n+1)^2+2n(n+1)(2n+1)}{12}\\ &= \frac{n(n+1)\left(3n(n+1)+2(2n+1)\right)}{24}\\ &= \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}\end{aligned}$$

3. $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j)$

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}(i+j)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} i+\sum_{i=1}^{j} j\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2}+j^2\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}3j^2+j\\
&= \frac{1}{2}\left(3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+2)}{4}
\end{aligned}$$

4. $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a^{i+j}, a\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a^{i+j} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a^i a^j\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a^i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a^j\right)\\
&= \left(\frac{a-a^{n+1}}{1-a}\right)^2
\end{aligned}$$

5. $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j)$

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j) &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\max(i,j)+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\max(i,j)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} i\\
&= \sum_{j=1}^{n} j^2+\sum_{i=1}^{n}(i-1)i\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)(2(2n+1)-3)}{6}\\
&= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}
\end{aligned}$$

6. $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n}\frac{ik}{j}$

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n} \frac{ik}{j} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j} \frac{ik}{j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \sum_{j=1}^{k} \frac{j+1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{k(k+1)}{2}+k\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2+2k) \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n(n+1)\right)
\end{aligned}$$

On peut encore mettre au même dénominateur, développer et réduire.

Bonus : pour certaines de ces sommes, écrire une fonction Python `somme(n)` qui les calcule itérativement.

Exercice 4 (Sommes de Riemann). Trouver la limite de :

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{kn}{k^2+n^2} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \\
&= \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 \\
&= \frac{\ln(2)}{2}
\end{aligned}$$

2. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\pi\frac{k}{n}\right) \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 x\sin(\pi x)dx \\
&= \left[x\times\frac{-\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi x)dx \text{ en intégrant par parties} \\
&= \frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\left[\sin(\pi x)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

3. $\sum_{k=n}^{2n} \frac{n}{k^2}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{2n} \frac{n}{k^2} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{(k+n)^2} \text{ par changement d'indice} \\
&= \frac{n}{n^2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(k+n)^2} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)^2 \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx
\end{aligned}$$

4. $\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots 2n}$

Passons au logarithme en posant $u_n = \ln(\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots 2n}$ (c'est légitime puisque pour $n \geqslant 0$, le produit est strictement positif).

Alors,

$$\begin{aligned}
u_n &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) \\
&= -\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(n) + \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= -\ln(n) + \ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+x)dx \\
&= [(x+1)\ln(x+1) - (x+1)]_0^1 \\
&= 2\ln(2) - 2 + 1 \\
&= 2\ln(2) - 1
\end{aligned}$$

On en déduit en revenant à la suite originale qu'elle converge vers $\exp(2\ln(2)-1) = \frac{4}{e}$

5. $\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

De même, posons $u_n = \ln\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)$.

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^{n}(nk)}\right)\\
&= \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=n+1}^{2n}\frac{k}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{n+j}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln\left(1+\frac{j}{n}\right)\\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+x)dx
\end{aligned}$$

Et on conclut comme dans la question précédente

Exercice 5 (Dénombrement)**.** *On ne fera pas de dénombrements techniques. Savoir quand même dénombrer le nombre de permutations d'un ensemble, le nombre de parties d'un ensemble*
Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. (a) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
   Un code est un élément de $[|1;9|]^3$, de cardinal 9^3 $(= 729)$
   (b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?
   C'est alors l'ensemble des éléments de $[|1;9|]^2 \times [|2;4;6;8|]$ de cardinal $9^2 \times 4 = 324$
   (c) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?
   On peut passer par le complémentaire : les codes qui ne comportent aucun 4 sont représentés par l'ensemble $[|1;2;3;5;6;7;8;9|]^3|]$ de cardinal $8^3 = 512$. Il reste donc 217 codes contenant au moins un 4
   (d) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?
   C'est un peu plus compliqué. Commençons par compter le nombre de codes contenant un seul chiffre 4 en première position, puis on multipliera par 3 en utilisant la symétrie du problème. Il faut alors compter 64 codes à deux chiffres entre 1 et 9 différents de 4. La réponse est donc :
   $$3 \times 64 = 192$$
2. Dans les questions suivantes, on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.
   (a) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
   Il y a 9 choix pour le premier chiffre, 8 pour le deuxième et 7 pour le troisième. Il y a donc au total 504 codes au total.
   (b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?
   Il y a 5 chiffres possibles pour le dernier chiffre. Il faut ensuite choisir les deux premiers chiffres pour qu'ils soient différents du dernier, soit $5 \times 8 \times 7 = 280$ codes possibles
   (c) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?
   Il y a $8 \times 7 \times 6$ codes ne comprenant pas de chiffre 6 donc au total $504 - 336 = 168$ codes contenant le chiffre 6

Exercice 6 (Trouver des limites via un argument de point fixe)**.** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $[-2;+\infty[$ par $f(x) = 2\sqrt{x+3}$

1. Étudier les variations de f sur $[-2,+\infty[$
   f est clairement strictement croissante (composée de fonctions croissantes) de 2 à $+\infty$

2. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante, minorée par -1 et majorée par 6.
   $u_1 = f(-1) = 2\sqrt{2} > -1 = u_0$. Puisque f est croissante et (u_n) récurrente associée à la fonction f, (u_n) est une suite monotone, et puisque $u_1 > u_0$, (u_n) est croissante donc toujours supérieure à son premier terme.
   De plus, $f(6) = 2\sqrt{6+3} = 2\sqrt{9} = 6$. En utilisant de nouveau la croissance de f, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $u_n \leqslant 6$, $f(u_n) \leqslant f(6)$ et donc $u_{n+1} \leqslant 6$. Par récurrence immédiate, (u_n) est majorée par 6
3. Justifier que (u_n) converge vers un réel ℓ, puis déterminer ℓ.
   On a justifié à la question précédente que (u_n) est croissante et majorée, elle converge donc. Notons ℓ sa limite. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, et que $u_{n+1} = f(u_n)$, à la limite $\ell = f(\ell)$, i.e. :
   $$2\sqrt{\ell+3} = \ell \text{ et donc } 4(\ell+3) = \ell^2$$
   En résolvant l'équation polynômiale du second degré, on trouve une seule solution dans l'intervalle $[-1;6]$: $\ell = 6$

Exercices d'algèbre linéaire

Exercice 7 (Bases). Trouver une base de :

1. $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 3x + 2y - z = 0\}$
   $$F_1 = \{(x,y,3x+2y)|(x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1,0,3) + y(0,1,2)|(x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,0,3),(0,1,2))$$
   Puisque ces deux vecteurs sont non colinéaires, $(1,0,3)$ et $(0,1,2)$ forment une base de F_1
2. $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + 2z = 0 \text{ et } x - y - z = 0\}$
   $$\begin{aligned} &\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& y &+& 2z &=& 0 \\ x &-& y &-& z &=& 0 \end{array}\right. \\ \iff &\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& y &+& 2z &=& 0 \\ &-& 2y &-& 3z &=& 0 \end{array}\right. \\ \iff &\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -\frac{7}{2}z \\ y &=& \frac{3}{2}z \end{array}\right. \end{aligned}$$
   Ainsi, $F_2 = \{(-\frac{7}{2}z; \frac{3}{2}z; z)|z \in \mathbb{R}\} = \{z(-\frac{7}{2}; \frac{3}{2}; 1)|z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((-\frac{7}{2}; \frac{3}{2}; 1))$ Puisque c'est un seul vecteur non nul, $(-\frac{7}{2}; \frac{3}{2}; 1)$ est une base de F_2 (on aurait aussi pu choisir $(-7;3;2)$)
3. $F_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x + 2y - 3z + t = 0 \text{ et } 2x - y + z - 5t = 0\}$
   $$\begin{aligned} &\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x &+& 2y &-& 3z &+& t &=& 0 \\ 2x &-& y &+& z &-& 5t &=& 0 \end{array}\right. \\ \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\iff} &\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x &+& 2y &-& 3z &+& t &=& 0 \\ &-& 5y &+& 7z &-& 7t &=& 0 \end{array}\right. \\ \iff &\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& \frac{1}{5}z &-& \frac{9}{5}t \\ y &=& \frac{7}{5}z &-& \frac{7}{5}t \end{array}\right. \end{aligned}$$
   On en déduit :
   $$F_3 = \{(\frac{1}{5}z - \frac{9}{5}t; \frac{7}{5}z - \frac{7}{5}t; z; t)|(z,t) \in \mathbb{R}^2)\} = \mathrm{Vect}((\frac{1}{5}; \frac{7}{5}; 1; 0), (-\frac{9}{5}; \frac{7}{5}; 0; 1))$$
   Cette famille étant libre, c'est une base de F_3

Dans l'autre sens pour tester : trouver les équations cartésiennes de :

1. $\mathrm{Vect}((1,0,-2),(3,1,-1))$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \mathrm{Vect}((1,0,-2),(3,1,-1)) &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, (x,y,z) = a(1,0,-2) + b(3,1,-1) \\
&\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcrcl} a & + & 3b & = & x \\ & & b & = & y \\ -2a & - & b & = & z \end{array}\right. \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}{\iff} \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcrcl} a & + & 3b & = & x \\ & & b & = & y \\ & & 5b & = & z+2x \end{array}\right. \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2}{\iff} \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcrcl} a & + & 3b & = & x \\ & & b & = & y \\ & & 0 & = & z+2x-5y \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Les deux premières équations ont toujours une solution, donc le système a une solution ssi $z+2x-5y = 0$, qui est l'équation cartésienne de $\mathrm{Vect}((1,0,-2),(3,1,-1))$

2. $\mathrm{Vect}((-1,-1,-1))$
   De même, on peut résoudre le même système et trouver $x = y = z$, ce qui est assez cohérent avec la tête du vecteur original.

Exercice 8 (Projecteurs)**.**
J'ai mis l'exercice puisque vous l'avez demandé mais je pense que la méthode pour montrer que deux ensembles sont supplémentaires de la première question, étant un peu technique, n'est pas la priorité si vous avez du mal, sachant qu'on aura d'autres outils plus efficaces bientôt ...

1. Montrer que $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + 3y = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((-1,1))$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$ et déterminer le projecteur sur F parallèlement à G, sur G parallèlement à F
2. Montrer que $p : (x,y) \mapsto (-y,y)$ est un projecteur, déterminer son noyau et son image.
   Calculer $p \circ p, \ker(p)$ et $\ker(p - id)$

Problèmes

Exercice 9 (Théorème des accroissements finis et suites récurrentes)**.** On pose $f : [0;1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(\sqrt{x})$

1. En utilisant la formule $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$, déterminer la limite en 0 de $\frac{1-\cos(t)}{t^2}$
   on l'a fait en classe ! et maintenant on connaît l'équivalent par cœur !
2. Démontrer que f est dérivable en 0 et calculer sa dérivée.
   Attention : ce n'est pas dérivable par **composition** puisque la racine carrée ne l'est pas ! Revenons au taux d'accroissement :
   $$\forall x > 0, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x} \sim \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}^2}{x} \to \frac{1}{2}$$
   On en déduit que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = \frac{1}{2}$
3. Démontrer pour tout $t \in [0;1], 0 \leqslant \sin(t) \leqslant t$
   On l'a aussi fait en classe ! On peut par exemple le faire par inégalité des accroissements finis (comme le titre de l'exercice y invite) ou poser une fonction et dériver, ou intégrer l'inégalité $\cos(x) \leqslant 1$...
4. Justifier que la fonction f admet un unique point fixe $a \in [0;1]$ (tel que $f(a) = a$)
   On cherche donc à résoudre l'équation $f(x) = x$ i.e. $f(x) - x = 0$. Posons : $g : x \mapsto \cos(\sqrt{x}) - x$. g est dérivable sur $[0;1]$, par composition sur $]0;1]$ et via la question 2 en 0. Pour $x > 0$,
   $$g'(x) = \frac{-\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} - 1 = \frac{-\sin(\sqrt{x}) - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} < 0$$
   et $g'(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$
   On en déduit que g est strictement décroissante, avec $g(0) = 1$ et $g(1) = \cos(1) - 1 < 0$. L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution a.

5. Démontrer que pour tous $x, y \in [0;1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$$

On reprend le calcul précédent pour vérifier uqe pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{-\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ donc $|f'(x)| = \frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{2}$ d'après la question 3. De plus, $|f'(0)| = \frac{1}{2}$. L'inégalité $|f'| \leqslant \frac{1}{2}$ est donc vraie sur $[0;1]$ et f est dérivable sur $[0;1]$ donc par inégalité des accroissements finis, pour tous $x, y \in [0;1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$$

6. On note (u_n) une suite définie par $u_0 \in [0;1]$ et pour tout $n \geqslant 0, u_{n+1} = f(u_n)$

   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0, |u_n - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - a|$
   On montre dans un premier temps en appliquant le résultat de la question 5 avec $x = u_n$ et $y = a$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - a|$. On conclut par récurrence.

   (b) En déduire la limite de (u_n)
   On en déduit $u_n \to a$ par théorème des gendarmes.

   (c) Écrire une fonction Python `approx(ecart)` qui donne une approximation de a avec un écart inférieur ou égal à `ecart`

Exercice 10 (Intégrales). 1. **Une autre approche des intégrales de Wallis.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$

   (a) Calculer I_0 et I_1
   $I_0 = \int_0^1 dt = 1$ et $I_1 = \int_0^1 (1-t^2)dt = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = (2n+2)(I_n - I_{n+1})$$

   Calculons d'abord pour tout n :

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^1 (1-t^2)^n dt - \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt = \int_0^1 (1-t^2)^n \left(1 - (1-t^2)\right) dt = \int_0^1 (1-t^2)^n t^2 dt$$

   Faisons un calcul sur I_{n+1} en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt \\ &= \left[t(1-t^2)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 t \times (-2t) \times (n+1)(1-t^2)^n dt \\ &= 0 + 2(n+1) \int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt \\ &= (2n+2) \int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt \\ &= (2n+2)(I_n - I_{n+1}) \end{aligned}$$

   (c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$
   On déduit de la question précédente : $I_{n+1} = (2n+2)I_n - (2n+2)I_{n+1}$ donc $(2n+3)I_{n+1} = (2n+2)I_n$ ou encore :

$$I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$$

   C'est une relation de récurrence, que l'on peut maintenant utiliser dans une récurrence.

— Initialisation pour $n = 0$: $I_0 = 1$ et $\frac{4^0 0!^2}{1!} = 1$

— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ un entier tel que $I_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$. D'après la relation de récurrence,

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{2n+3} I_n \\
&= \frac{2(n+1)}{2n+3} \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{2^2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{4^{n+1}(n+1)!^2}{(2n+3)!}
\end{aligned}$$

et la récurrence est établie.

(d) En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n+1} dt$

La question que l'on se pose c'est : quel rapport ? faisons un changement de variable (non indiqué ici) : $t = \sin(u)$ et donc $dt = \cos(u)du$.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 (1 - t^2)^n dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin(u)^2)^n \cos(u) du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^{2n+1} du
\end{aligned}$$

On en déduit donc : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n+1} dt = \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!}$

2. **Une autre suite d'intégrales** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2}(x) dx$

(a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Pour $t \in [0; \frac{\pi}{4}]$, $\tan(t) \in [0; 1]$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \tan^{n+3}(t) \leqslant 0 \leqslant \tan^{n+2}(t)$ et on conclut que la suite (u_n) est décroissante et minorée par croissance de l'intégrale. D'après le théorème de la limite monotone, c'est donc une suite convergente.

(b) Calculer $u_{n+2} + u_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
u_{n+2} + u_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+4}(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2}(x) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2}(x) \left(\tan^2(x) + 1\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan'(x) \tan^{n+2}(x) dx \\
&= \frac{1}{n+3} \left[\tan(x)^{n+3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{n+3}(1 - 0) = \frac{1}{n+3}
\end{aligned}$$

(c) En déduire la limite de (u_n)*ainsi qu'un équivalent en* $+\infty$

On a montré : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_n = \frac{1}{n+3}$. Par ailleurs, (u_n) est convergente : notons ℓ sa limite. En passant à la limite dans la phrase précédente, on déduit :

$$\ell + \ell = 0$$

et donc $\ell = 0$

Exercice 11 (Variables aléatoires)**.** On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue une infinité de tirages avec remise et pour tout k, on note X_k la variable aléatoire désignant le numéro de la k-ième boule. On note aussi $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$. On note enfin T_n le nombre de tirages nécessaires pour que la somme des numéros obtenus soit supérieure ou égale à n.
Exemple : avec $n = 10$, si on tire les numéros $2, 4, 1, 5, 9$, on obtient $S_1 = 2, S_2 = 6, S_3 = 7, S_4 = 12, S_5 = 21$ et $T_10 = 4$

1. **Échauffement.**
   (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi et l'espérance de X_k
   $X_k(\Omega) = [|1; n|]$ et X_k suit une loi uniforme. On en déduit $E(X_k) = \frac{n+1}{2}$
   (b) Déterminer $T_n(\Omega)$
   $T_n(\Omega) = [|1; n|]$ puisqu'au minimum on atteint n dès le premier tirage et au maximum il faut n étapes en tirant des 1.
   (c) Calculer $\mathbb{P}(T_n = 1)$
   $\mathbb{P}(T_n = 1) = \mathbb{P}(X_1 = n) = \frac{1}{n}$
   (d) Montrer :
   $$\mathbb{P}(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$
   $$\mathbb{P}(T_n = n) = \mathbb{P}(X_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap \ldots \cap X_{n-1} = 1) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = 1) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$
   par indépendance mutuelle des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_{n-1}$
   (e) Pour $n = 2$, calculer la loi de T_2
   $T_2(\Omega) = \{1; 2\}$ et $\mathbb{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(T_2 = 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$ d'après les questions précédentes.
   (f) Pour $n = 3$, calculer la loi de T_3 et montrer : $E(T_3) = \frac{16}{9}$
   $T_3(\Omega) = \{1; 2; 3\}$ avec $\mathbb{P}(T_3 = 1) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(T_3 = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ et donc puisque $(T_3 = 1, T_3 = 2, T_3 = 3)$ est un système complet d'événements : $\mathbb{P}(T_3 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$
   On en déduit :
   $$E(T_3) = 1 \times \mathbb{P}(T_3 = 1) + 2 \times \mathbb{P}(T_3 = 2) + 3 \times \mathbb{P}(T_3 = 3) = \frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{9} + 3 \times \frac{1}{9} = \frac{3 + 10 + 3}{9} = \frac{16}{9}$$

2. **Cas général**
   (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $S_k(\Omega)$
   Puisqu'au minimum on tire des 1 et au maximum des n, $S_k(\Omega) = [|k; nk|]$
   (b) Soit $k \in [|1; n-1|]$. Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1}
   $$S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$$
   (c) En utilisant le système complet d'événements associé à S_k, montrer :
   $$\forall i \in [|k+1, n|], \mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j)$$
   En utilisant la formule des probas totales dans le système complet d'événements $(S_k = k, S_k =$

$k+1, \dots, S_k = kn$),

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{k+1} = i) &= \sum_{j=k}^{kn} \mathbb{P}(S_{k+1} = i \cap S_k = j) \\
&= \sum_{j=k}^{kn} \mathbb{P}(S_k = j)\mathbb{P}_{S_k=j}(S_k + X_{k+1} = i) \\
&= \sum_{j=k}^{kn} \mathbb{P}(S_k = j)\mathbb{P}_{S_k=j}(X_{k+1} = i - j) \\
&= \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j)\mathbb{P}(X_{k+1} = i - j) \text{ car } X_{k+1} \geqslant 1 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j)
\end{aligned}$$

(d) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$

$$\binom{j}{k} = \binom{j-1}{k-1} + \frac{j-1}{k}$$

(e) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \geqslant k+1$,

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} &= \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j}{k} - \binom{j-1}{k} \\
&= \binom{i-1}{k} - \binom{k-1}{k} \text{ par télescopage} \\
&= \binom{i-1}{k}
\end{aligned}$$

(f) Montrer par récurrence sur k que pour tout $k \in [|1;n|]$, pour tout $i \in [|k;n|]$,

$$\mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1}$$

On utilise la relation de récurrence de la question c, pour écrire dans l'hérédité : si k est un entier tel que pour tout $i \in [|k,n|]$ l'égalité soit vérifiée, montrons que la propriété est vraie au rang $k+1$ en posant $i \in [|k+1;n|]$ et en écrivant :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{k+1} = i) &= \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} \frac{1}{n^k}\binom{j-1}{k-1} \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1}{n^{k+1}}\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} \\
&= \frac{1}{n^{k+1}}\binom{i-1}{k} \text{ d'après la question précédente}
\end{aligned}$$

et la récurrence est établie.

(g) Soit $k \in [|1; n-1|]$. Comparer les événements $[T_n > k]$ et $[S_k \leqslant n-1]$
$T_n > k$ si et seulement si au rang k la valeur de n n'est pas encore atteinte i.e. $S_n < n$ et puisque S_n est à valeurs entières c'est équivalent à $S_n \leqslant n-1$, d'où l'égalité d'ensembles :

$$(T_n > k) = (S_n \leqslant n-1)$$

(h) En déduire que pour tout $k \in [|0; n-1]$:

$$\mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}$$

3. Démontrer que $E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_n > k)$
C'est un résultat très classique, dont on reparlera quand on retravaillera les variables aléatoires ...

$$\begin{aligned} E(T_n) &= \sum_{j=0}^{n} j\mathbb{P}(T_n = j) \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j-1} \mathbb{P}(T_n = j) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}(T_n = j) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_n > k) \end{aligned}$$

4. En déduire : $E(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$
On en déduit :

$$\begin{aligned} E(T_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_n > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}\frac{1}{n^k}1^{n-k} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \quad \text{via la formule du binôme} \end{aligned}$$

5. En déduire la limite de $E(T_n)$.
Attention, il y a une forme indéterminée 1^∞. On écrit :

$$E(T_n) = \exp(n - 1\ln(1 + \frac{1}{n}))$$

Or, $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc $(n-1)\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{n-1}{n} \sim 1$ Par composition des limites, $E(T_n) \to \exp(1) = e$