Feuilles d'exercices n°17

Exercice 10. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité en 0 ?
Ça se reformule : les fonctions suivantes (non définies en 0) ont elles une limite finie en 0 ?

1. $f_1(x) = \frac{e^x-1}{x^2}$
   $f_1(x) \sim \frac{x}{x^2} \sim \frac{1}{x}$. Or, la fonction inverse n'a pas de limite en 0 (elle a deux limites différentes à gauche et à droite, toutes deux infinies) donc f_1 n'est pas prolongeable par continuité.
2. $f_2(x) = \exp\left(\frac{\sin x}{x^{\frac{1}{3}}}\right)$
   $\frac{\sin x}{x^{\frac{1}{3}}} \sim \frac{x}{x^{\frac{1}{3}}} \sim x^{\frac{2}{3}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ Ainsi, par continuité de l'exponentielle, $f_2(x) \xrightarrow[x\to 0]{} e^0 = 1$. f_2 se prolonge par continuité en 0.
3. $f_3(x) = \frac{\ln(\cos x)}{x^{\frac{3}{2}}}$
   $f_3(x) = \frac{\ln(1+\cos(x)-1))}{x^{\frac{3}{2}}} \sim \frac{\cos(x)-1}{x^{\frac{3}{2}}} \sim \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^{\frac{3}{2}}} \sim -\frac{\sqrt{x}}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ Ainsi, f_3 se prolonge par continuité en 0.
4. $f_4(x) = (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$
   $f_4(x) = \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln(1+x)\right)$. Or, $\frac{1}{x^2}\ln(1+x) \sim \frac{x}{x^2} \sim \frac{1}{x}$. Puisque $\frac{1}{x}$ a une limite différente à gauche et à droite en 0, f_4 aussi et donc f_4 ne se prolonge pas par continuité en 0.

Exercice 11. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^9 + x^8$

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution x_n dans $[1;+\infty[$
   La fonction f est clairement strictement croissante et continue sur $[1;+\infty[$, donc bijective de $[1;+\infty[$ vers $[2;+\infty[$. On en déduit que pour tout $n \geq 2$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $[1;+\infty[$, donnée par $x_n = f^{-1}(n)$
2. Montrer :
   $$\forall x \geq 1, x^9 \leq x^9 + x^8 \leq 2x^9$$
   Ça découle directement de : $0 \leq x^8 \leq x^9$.
3. En déduire :
   $$\forall n \geq 2, \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{9}} \leq x_n \leq n^{\frac{1}{9}}$$
   Soit $n \geq 2$. En appliquant les inégalités précédentes à x_n (qui est bien dans $[1;+\infty[$) on obtient d'une part :
   $$x_n^9 \leq x_n^9 + x_n^8 \quad \text{i.e.} \quad x_n^9 \leq n \quad \text{i.e.} \quad x_n \leq n^{\frac{1}{9}}$$
   Et d'autre part :
   $$x_n^9 + x_n^8 \leq 2x_n^9 \quad \text{i.e.} \quad n \leq 2x_n^9 \quad \text{i.e.} \quad x_n \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{9}}$$
4. Montrer alors que $x_n^8 = o(n)$
   En mettant à la puissance 8 puis en divisant l'inéquation précédente par n (pour $n \geq 2$) :
   $$\frac{n^{\frac{8}{9}}}{2^{\frac{8}{9}}n} \leq \frac{x_n^8}{n} \leq \frac{n^{\frac{8}{9}}}{n}$$
   En simplifiant, on obtient :
   $$\frac{1}{2^{\frac{8}{9}}n^{\frac{1}{9}}} \leq \frac{x_n^8}{n} \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{9}}}$$
   Par théorème des gendarmes, $\frac{x_n^8}{n} \to 0$ et donc $x_n^8 = o(n)$
5. En déduire un équivalent simple de x_n
   Attention ! savoir que $x_n^8 = o(n)$ tout court ne suffit pas à en trouver un équivalent. En revanche, en réinjectant dans la définition de x_n :
   $$x_n^9 + x_n^8 = n$$
   on obtient :
   $$x_n^9 + o(n) = n$$

ou encore $x_n^9 = n + o(n)$ ou encore $x_n^9 \sim n$ et on conclut : $x_n \sim n^{\frac{1}{9}}$, ce qui est raisonnable puisque si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^9$, x_n est «presque» la racine 9-ième de n.

Exercice 14. On se donne $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites.

1. Montrer que si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n = o(w_n)$
   Sous ces hypothèses, il existe une suite (ε_n) et une suite (α_n) tendant respectivement vers 0 et vers 1, et vérifiant à partir d'un certain rang $u_n = \varepsilon_n v_n$ et $v_n = \alpha_n w_n$. On a alors :
   $$u_n = \varepsilon_n \alpha_n w_n$$
   et $\varepsilon_n \alpha_n \to 1 \times 0 = 0$ (par opérations élémentaires sur les limites) donc $u_n = o(w\ )$
2. Montrer que si $u_n \sim v_n$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$
   Tout pareil en échangeant les rôles de (α_n) et (ε_n)

Exercice 15. Soient $(u_n), (v_n)$ des suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

1. Montrer que $(e^{u_n} \sim e^{v_n}) \iff (u_n - v_n) \to 0$
   $e^{u_n} \sim e^{v_n} \iff \frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} \to 1 \iff e^{u_n - v_n} \to 1 \iff u_n - v_n \to 0$ en passant au logarithme.
2. Si $u_n \sim v_n$, a-t-on $e^{u_n} \sim e^{v_n}$?
   Non, par exemple $u_n = n$ et $v_n = n + 1$

Exercice 16 (Gendarmes mobiles)**.** Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et a, b, f des fonctions définies sur un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 vérifiant :
$$\forall x \in \mathcal{V}, 0 < a(x) \leq f(x) \leq b(x)$$
et $a(x) \underset{x\to x_0}{\sim} b(x)$. Montrer :
$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} a(x) \underset{x\to x_0}{\sim} b(x)$$

Toutes les fonctions étant strictement positives par hypothèse, on peut par exemple diviser par $a(x)$ dans l'inégalité. On obtient :
$$1 \leq \frac{f(x)}{a(x)} \leq \frac{b(x)}{a(x)}$$
Puisque $a(x) \sim b(x)$, alors $\frac{b(x)}{a(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 1$ et par théorème des gendarmes, $f(x) \sim a(x)$. On peut ensuite recommencer, ou plus simplement utiliser la transitivité : $f(x) \sim a(x) \sim b(x)$ et les trois fonctions sont équivalentes entre elles.