Feuille d'exercices n°17

Calculs de limites et d'équivalents

Exercice 1 (À connaître). Déterminer la limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Exercice 2 (Niveau 1). Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes :

1. $(x^2-5x+3x^3)e^x$ en $+\infty$
2. $(x^2-5x+3x^3)e^x$ en 0
3. $3\sqrt{x}+2x$ en $+\infty$
4. $\sqrt{2x^3+2+\frac{1}{x}}$ en $+\infty$
5. $\sin x+e^x$ en 0
6. $\sin x+e^x$ en $+\infty$
7. $\frac{x+\ln x}{x^2+2}$ en $+\infty$
8. $\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$
9. $u_n=\frac{n!+e^n}{2^n+3^n}$
10. $u_n=\frac{(2n+1)(e^n-n)}{\sqrt{n}+\ln n}$

Exercice 3 (Niveau 2). Même question.

1. $\ln(1+\sin x)$ en 0
2. $\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$ en 0
3. e^x+x-1 en 0
4. $x\left(e^{\frac{1}{x}}-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ en $+\infty$
5. $u_n=1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)$
6. $u_n=\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}-2$
7. $u_n=n^2\sin(\arctan\left(\frac{1}{n}\right))$
8. $u_n=\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

♢ **Exercice 4.** Étudier :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x^3/2)-1}{\tan^3(x/5)}$$

Exercice 5. Soit (S_n) la suite définie par : $\forall n\geqslant 1, S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$

1. Montrer : $\forall k\in\mathbb{N}^*, \frac{1}{2\sqrt{k+1}}\leqslant\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{k}}$
2. En déduire :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*, 2\left(\sqrt{n+1}\right)-1\big)\leqslant S_n\leqslant 2\left(\sqrt{n+1}-\frac{1}{2}\right)$$
3. En déduire un équivalent de la suite (S_n)

Exercice 6 (Équivalent ailleurs qu'en 0 ou $\pm\infty$).

1. Donner un équivalent simple de $\ln(x)$ quand $x\to 1$
2. Étudier la limite quand x tend vers 1 de $\frac{\ln(x)}{x^2-1}$
3. Donner un équivalent simple de $x\mapsto\ln(\cos(x))$ en $\frac{\pi}{2}^-$
4. Étudier $\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(3x)}{\cos(x)}$

♢ **Exercice 7.** On pose $f:x\mapsto\ln(x^3-12x+16)$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. Donner des équivalents (simples) de f en $0, 2, +\infty$

Exercice 8 (Des ln dans tous les sens). Donner des équivalents simples en $+\infty$ de :

1. $\sqrt{\ln(x+1)-\ln(x)}$
2. $x\ln(x+1)-(x+1)\ln(x)$
3. $\ln(e^x+e^{-x})$
4. $\ln(1+e^{-x})$

♢ **Exercice 9.** Soit P une fonction polynômiale. Déterminer un équivalent de $P(x)$ en $0, +\infty, -\infty$

«Applications»

Exercice 10. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité en 0 ?

1. $f_1(x) = \frac{e^x-1}{x^2}$
2. $f_2(x) = \exp\left(\frac{\sin x}{x^{\frac{1}{3}}}\right)$
3. $f_3(x) = \frac{\ln(\cos x)}{x^{\frac{3}{2}}}$
4. $f_4(x) = (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$

Exercice 11. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^9 + x^8$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution dans $[1;+\infty[$
2. Montrer :
$$\forall x \geqslant 1, x^9 \leqslant x^9 + x^8 \leqslant 2x^9$$
3. En déduire :
$$\forall n \geqslant 2, \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{9}} \leqslant x_n \leqslant n^{\frac{1}{9}}$$
4. Montrer alors que $x_n^8 = o(n)$
5. En déduire un équivalent simple de x_n

Exercice 12. On considère la fonction définie par $[0;1[$ par $f(x) = \frac{2x}{\pi}\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution que l'on notera x_n
2. Montrer que la suite (x_n) est décroissante puis qu'elle converge vers un réel qu'on déterminera.
3. Déterminer un équivalent simple de (x_n).

Exercice 13 (Un avant goût d'un chapitre futur)**.**

1. Déterminer un équivalent de $\ln(1+x+x^2)$ en 0 et en 1, en déduire la position du graphe de $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ en 0 et en 1
2. Soit $f : x \mapsto \left(1+2x^2+x^3\right)^{\frac{1}{3}}$. Montrer que la courbe de f admet une asymptote oblique en $+\infty$? Determiner si la courbe de f est en-dessous ou au-dessus de cette asymptote.

Résultats théoriques

Exercice 14. On se donne $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites.

1. Montrer que si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n = o(w_n)$
2. Montrer que si $u_n \sim v_n$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$

Exercice 15. Soient $(u_n), (v_n)$ des suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

1. Montrer que $(e^{u_n} \sim e^{v_n}) \iff (u_n - v_n) \to 0$
2. Si $u_n \sim v_n$, a-t-on $e^{u_n} \sim e^{v_n}$?

Exercice 16 (Gendarmes mobiles)**.** Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et a, b, f des fonctions définies sur un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 vérifiant :
$$\forall x \in \mathcal{V}, 0 < a(x) \leqslant f(x) \leqslant b(x)$$
et $a(x) \underset{x\to x_0}{\sim} b(x)$. Montrer :
$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} a(x) \underset{x\to x_0}{\sim} b(x)$$

◊ **Exercice 17** (Un peu comme les degrés étagés)**.** On se donne une famille $(f_1, \dots, f_n)$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant en $+\infty$:
$$f_1 = o(f_2), \quad f_2 = o(f_3), \quad \dots, f_{n-1} = o(f_n)$$
Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ forme une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$