Chapitre 17 : Études asymptotiques Études locales

Analyse 6

Objectif : agrandir notre boîte à outils pour lever des indéterminations sur des limites !
À la fin du chapitre nous saurons trouver la limite de :

$$n^2 \sin\left(\tan\left[\frac{3}{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{4}}-1\right)\right]\right)$$

I. Cas des suites

1. Croissances comparées

Propriété 1 (Lemme utile)**.** Soit (u_n) une suite telle que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \ell$ et $0 \leqslant \ell < 1$, alors $u_n \to 0$. Si $\ell > 1$, alors $|u_n| \to +\infty$ et donc (u_n) diverge.

Démonstration. Comparaison avec une suite géométrique.

♡ **Limites usuelles**

- **Suites «puissances»** :
  Si $\alpha > 0$, $n^\alpha \to +\infty$, $\dfrac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha} \to 0$
  Savoir gérer l'écriture n^α avec $\alpha < 0$
- **Suites géométriques** :
  — Si $q > 1$, $q^n \to +\infty$
  — Si $-1 < q < 1$, $q^n \to 0$
  — Si $q = 1$, $q^n \to 1$
  — Si $q < -1$, (q^n) diverge
- **Croissance comparée log/puissance** :
  Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\ln(n)^\beta}{n^\alpha} \to 0$ et $\dfrac{n^\alpha}{\ln(n)^\beta} \to +\infty$
- **Croissance comparée puissance/géométrique** :
  Si $\alpha > 0$ et $q \in]-1;1[$,
  $$q^n n^\alpha \to 0$$
- **Croissance comparée géométrique/factorielle** :
  Si $q \in \mathbb{R}$,
  $$\frac{q^n}{n!} \to 0$$

2. Suites négligeables

♡ **Définition 2.** Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que u_n est négligeable devant v_n, et on note $u_n = o(v_n)$ si :

$$\exists (\varepsilon_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \varepsilon_n v_n \text{ et } \varepsilon_n \to 0$$

ou $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang seulement.

Propriété 3. Si (v_n) ne s'annule pas (à partir d'un certain rang), $u_n = o(v_n) \iff \dfrac{u_n}{v_n} \to 0$
Démonstration.

Exemples.
- $\frac{1}{n} = o(1)$. Peut-on trouver d'autres suites négligeables devant 1 ?
- $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$
- $n = o(n^2)$. Plus généralement : si $\alpha < \beta$, $n^\alpha = o\left(n^\beta\right)$

Remarque. Sur la notation $u_n = o(v_n)$: $n = o(n^3)$, $n^2 = o(n^3)$ mais ...
Propriété 4 (Transitivité)**.** Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ des suites.
Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$

Propriété 5 (Multiplication par un réel)**.** Soient (u_n) et (v_n) deux suites et $\lambda \neq 0$
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = o(\lambda v_n)$
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $\lambda u_n = o(v_n)$

Propriété 6 (Somme de suites)**.** Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites telles que $v_n = o(u_n)$ et $w_n = o(u_n)$. Alors,

$$v_n + w_n = o(u_n)$$

On peut retenir cette propriété sous la forme :«$o(u_n) + o(u_n) = o(u_n)$»

Remarque. Si (u_n) est fixé, on a en fait écrit que l'ensemble des suites négligeables devant u_n est un espace vectoriel. On a déjà parlé de l'ev. des suites qui tendent vers 0 : $o(1)$

Remarque. Cette propriété n'est **pas** : $w_n = o(u_n), z_n = o(v_n)$ implique $w_n + z_n = o(u_n + v_n)$. Contre-exemple !

Propriété 7 (Produit de suites)**.** Soient $(u_n), (v_n), (w_n), (z_n)$ quatre suites telles que $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(z_n)$. Alors

$$u_n v_n = o(w_n z_n)$$

Propriété 8 (Produit par une suite)**.** Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$

3. Croissances comparées

Propriété 9 (Reformulation)**.** Les croissances comparées de début du chapitre se réécrivent :

- Si $\alpha, \beta > 0$, $(\ln(n))^\beta = o(n^\alpha)$
- Si $q \in]-1;1[$ et $\alpha > 0$, $q^n = o(n^{-\alpha})$
- Si $q \in \mathbb{R}$, $q^n = o(n!)$

Cette liste nous permet de nous créer une échelle dans les vitesses de convergences : notation «de Hardy» (désuète) pour $\alpha > 0$ et $q > 1$:

$$(\ln n)^\beta \prec n^\alpha \prec q^n \prec n!$$

4. Suites équivalentes

♡ **Définition 10.** On dit que (u_n) et (v_n) sont équivalentes, et on note $u_n \sim v_n$, si :

$$u_n = v_n + o(v_n)$$

Si (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, c'est équivalent à : $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$

Remarque. $u_n \sim v_n$ représente le fait que (u_n) et (v_n) soient proches, mais **pas** au sens $u_n - v_n \to 0$. Exemples.

Vrai / Faux.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes. On peut déduire :

1. (u_n) et (v_n) ont le même sens de variation
2. (u_n) et (v_n) ont la même limite
3. (u_n) et (v_n) ont le même signe
4. (u_n) et (v_n) ont le même signe à partir d'un certain rang
5. Si (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, (v_n) non plus.
6. Si (u_n) est bornée, (v_n) est bornée

Proposez vos propres conjectures !

Démonstration.

Propriété 11 (RST)**.** Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites. On a les propriétés suivantes :

1. **Réflexivité** : $u_n \sim u_n$
2. **Symétrie** : Si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$
3. **Transitivité** : Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$

Démonstration.

♠ *Remarque.* Au chapitre 1, on a écrit que la relation $\Leftrightarrow$ avait les mêmes propriétés. Ça tombe bien, puisque les deux s'appellent **équivalences**

Exemples.

- $n \sim_{+\infty} n+1$
- $n^5 + 15n + 18 + \sin(n) - \frac{187}{n^2} \sim_{+\infty} n^5$
- Pour $\ell \in \mathbb{R}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $[u_n \to \ell] \iff [u_n \sim \ell]$

Remarque. Dans le deuxième exemple : on retrouve d'idée de terme prépondérant utilisée dans les calculs de limites. Dans le dernier : la notion d'équivalent permet de **préciser** celle de limites : $u_n \to \ell$, mais comment ?

⚠ On n'écrit **JAMAIS : ÉQUIVALENT À ZÉRO**

Exemple. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout n par les formules suivantes sont équivalentes :

$$u_n = \frac{n}{2n^3+5n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{2n^2}$$

Propriété 12 (Produits, quotients)**.** Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim z_n$, alors

$$u_n v_n \sim w_n z_n$$

Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim z_n$, et si (w_n) ne s'annule pas (à partir d'un certain rang) alors

$$\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{w_n}{z_n}$$

Démonstration.

Propriété 13 (Puissances)**.** Si $u_n \sim v_n$ et $p \in \mathbb{N}$, alors

$$u_n^p \sim v_n^p$$

Si de plus (u_n) est strictement positive à partir d'un certain rang, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$$

Démonstration. Remarque : l'hypothèse de positivité est nécessaire pour que u_n^α ait un sens !

Exemple (Racine carrée)**.** Cas particulier : si $u_n \sim v_n$ sont deux suites strictement positives, alors

$$\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$$

♡ *Remarque.* Ce n'est pas le cas pour toutes les fonctions (à la place de la racine carrée) ! Exemple de $\left(e^{n+1}\right)$ et (e^n)

Exercice.

1. Montrer (on pourra dériver) :

♡ $$\forall x \geqslant 0, x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$$

2. Montrer : si (u_n) est strictement positive et $u_n \to 0$, alors $\sin(u_n) \sim u_n$

Remarque. Comme pour les négligeabilités, $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim z_n$ n'implique pas $u_n + w_n \sim v_n + z_n$

II. Études de fonctions

1. Rappels de limites

Propriété 14 (Croissance comparée à l'infini)**.**

- Si $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $\frac{\ln(x)^b}{x^a} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
- Si $b < 0$ et $a \in \mathbb{R}$, $|x|^a e^{bx} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
- Si $b > 0$ et $a \in \mathbb{R}, |x|^a e^{bx} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$
- Les autres cas ne sont pas des formes indéterminées.

Propriété 15 (Croissance comparée en 0)**.** $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

Propriété 16 (Limites usuelles : taux d'accroissements)**.**

- $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$
- $\dfrac{\ln(x)}{x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} 1$
- $\dfrac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$
- $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$
- $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{\tan(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

Démonstration. Pour certaines limites qui n'ont pas encore été vues en classe.

2. Fonctions négligeables, fonctions équivalentes

Définition 17 (Voisinage)**.** Si $a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de a toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle contenant a. Si $a = +\infty$, on appelle voisinage de $+\infty$ toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $[M;+\infty[$ et si $a = -\infty$ toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]-\infty;M]$, avec $M \in \mathbb{R}$

Cadre : dans toute la suite et les exercices, on s'intéresse à des fonctions définies sur un voisinage $\mathcal{V}$ de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Définition 18. Par analogie avec les suites, on définit pour des fonctions f et g :

- f négligeable devant g en a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \text{ si } \left(\exists \varepsilon : \mathcal{V} \to \mathbb{R}, \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \text{ et } f(x) = \varepsilon(x) g(x)\right)$$

  ou si g ne s'annule pas sur $\mathcal{V}$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

- f équivalente à g en a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$$

  ou si g ne s'annule pas sur $\mathcal{V}$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$$

Propriété 19 (Calcul)**.** Toutes les propriétés de calcul se transposent ! Voir dans la première partie : transitivité,+ opérations sur les o (sommes, multiplications, ...), RST de l'équivalence, produit, quotient, puissances.

♣ *Exercice.* Réécrire ces propriétés pour des fonctions.

Remarque. Quelle est alors la différence entre suites et fonctions ? Comme pour les limites : on ne s'intéresse plus seulement à ce qui se passe en $+\infty$, mais aussi en $-\infty$ et au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

3. Équivalents classiques

♡ Les limites connues se relisent sous forme d'équivalences/négligeabilités :

Propriété 20.

- Si $a > 0$, $\ln(x)^b \underset{+\infty}{=} o(x^a)$
- Si $b < 0, |x|^a \underset{+\infty}{=} o(e^{-bx})$

Propriété 21.

- $\ln(1+x) \sim_0 x$
- $e^x - 1 \sim_0 x$
- $\sin(x) \sim_0 x$
- $1 - \cos(x) \sim_0 \frac{x^2}{2}$
- $\tan(x) \sim_0 x$
- $\arctan(x) \sim_0 x$

Remarque. Pour une fonction au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, on se ramènera le plus souvent en 0 en posant $x = a + u$

Exemple. Équivalent en 1 : $\ln(x) \sim_1 x - 1$

4. Nouvelles propriétés de calcul

Propriété 22 (Composition)**.** Si I est un intervalle,$h : I \to \mathcal{V}$ et $f, g : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ vérifient : $f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big)$ (resp. $f \underset{a}{\sim} g$), et h est une fonction définie sur un voisinage de b telle que $h(x) \xrightarrow[x\to b]{} b$, alors

$$f \circ h \underset{b}{=} o\big(g \circ h\big)$$

respectivement :

$$f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ h$$

Remarque. On peut donc composer à **droite** mais jamais à gauche ! Cf. contre-exemple pour les suites !

♡ **Exemple.** Un autre équivalent classique : si $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^{\alpha} - 1 \sim_0 \alpha x$

Exercice. Déterminer un équivalent en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+\sin(x))$

Propriété 23 (Lien entre fonctions et suites)**.** Si u_n est une suite vérifiant : $u_n \to a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et que f, g sont deux fonctions définies sur un voisinage de a vérifiant $f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big)$ (resp. $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$), alors

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o\big(g(u_n)\big)$$

resp. $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(u_n)$

Exemples. Déterminer un équivalent simple de $\ln(n+1) - \ln(n)$

Exercice. Déterminer la limite en $+\infty$ de la suite u_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = n^2 \sin\left(\tan\left[\frac{3}{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{4}} - 1\right)\right]\right)$$

RÉCAPITULATIF

Produit, quotient : OUI
Somme, composition : ATTENTION
Équivalent à zéro : NON
Des petits dictons à garder en tête : o est gourmand, équivalents de l'extérieur vers l'intérieur comme des poupées russes
Dans le doute : revenir aux o voire à la définition !