Analyse 7

Chapitre 18 : Séries numériques

Il n'y a pas de mouvement car ce qui est en mouvement doit parvenir à la moitié avant d'atteindre son terme.

Aristote

I. Convergence des séries numériques

1. Premiers pas

Définition 1. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On appelle **série de terme général** (u_n) la suite (S_n) définie pour tout N par

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

On dit que S_N est la **somme partielle** d'indice N de la série.

Remarque. (S_n) est donc un cas particulier de suite. Particulier ? Pas tant que ça puisque si (u_n) est une suite, alors pour tout entier n :

$$u_n = u_0 + \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1})$$

Définition 2 (Convergence : vocabulaire)**.** On dit que la série de terme général (u_n) est convergente si la série (S_n) associée converge. On appelle alors **somme** de la série sa limite S, notée :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

On appelle **reste** d'indice N de la série la quantité $S - S_N$, noté :

$$R_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$$

Si (u_n) et (v_n) convergent ou que les deux divergent, on dit que les séries associées sont **de même nature**

Remarque. Je note $\sum u_n$ sans indice pour parler de la **série**, $\sum_{n=0}^{N} u_n$ pour parler de la **somme partielle** et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ou $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ la valeur de la somme (limite), mais ce n'est pas universel.

Exemples. Montrer que la série de terme général $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ converge et calculer sa somme.

♡ *Exercice* (Divergence de la série harmonique - notre exemple préféré de série divergente).

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Exprimer $S_{2n} - S_n$ sous la forme d'une somme indexée de 1 à n
2. En reconnaissant une somme de Riemann *(rappel du chapitre 14)*, déterminer la limite de $S_{2n} - S_n$
3. En déduire par l'absurde que la série harmonique diverge.

Propriété 3 (Une condition nécessaire de convergence)**.** Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \to 0$

Démonstration. En écrivant $u_n = S_n - S_{n-1}$

♡ **Définition 4** (Divergence grossière)**.** Cette propriété sert surtout pour sa contraposée : si u_n ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge et on dit qu'elle **diverge grossièrement**.

Exemples (de séries grossièrement divergentes)**.**

- $\sum n$
- $\sum \frac{n}{n+1}$
- $\sum (-1)^n$
- $\sum \sin(n)$

♠ *Remarque* (Culturel). il existe d'autres «procédés de sommation» qui permettent de donner du sens à la somme des entiers (le fameux $-\frac{1}{12}$!)- voir vidéos de Benoît Rittaud et de Micmaths, ou - plus technique, avec des nombres complexes, mais très beau - de 3Blue1Brown, en anglais

Remarque. Ce n'est pas une équivalence ! Contre-exemple ?

2. Opérations

Propriété 5. Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles et λ un réel.

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum (u_n + v_n)$ converge, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

- Si $\lambda \neq 0$, alors $\sum \lambda u_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature, et si elles convergent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Démonstration. Deux linéarités à l'œuvre : celle de la somme (la vraie), celle de la limite. Méthode à chaque fois : revenir à la définition, c'est-à-dire aux sommes partielles !

Remarque. Cette propriété dit que l'ensemble $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \sum u_n \text{ converge}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Exercice. Lesquelles de ces implications sont-elles vraies ?

1. $\sum u_n + v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent
2. $\sum u_n + v_n$ et $\sum u_n$ convergent $\Rightarrow \sum v_n$ converge
3. $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent $\Rightarrow \sum u_n + v_n$ diverge
4. $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge $\Rightarrow \sum u_n + v_n$ diverge

II. Cas particulier : séries à termes positifs (apcr)

1. Théorèmes de convergence

Dans tous les résultats qui suivent, n_0 est un entier et (u_n), (v_n) deux suites vérifiant pour $n \geqslant n_0$: $u_n \geqslant 0, v_n \geqslant 0$. Ces résultats s'adaptent de manière immédiate à des suites négatives à partir d'un certain rang, l'important étant de rester **de signe constant**.

Propriété 6. La série de terme générale u_n converge si et seulement si ses sommes partielles sont bornées :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant M$$

Sinon, elle diverge vers $+\infty$

Démonstration. Conséquence directe du théorème de la limite monotone.

Propriété 7 (Corollaire)**.** Si pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ alors

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge

Démonstration.

Exemples.
1. En posant $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$
2. $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = \frac{1}{n^2+5n}$

♣

Théorème 8 (ADMIS)**. Séries de termes généraux équivalents ou négligeables**

1. Si $u_n = o(v_n)$, alors
   - Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
   - Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.
2. Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exemple. $u_n = \frac{1}{2^n}$ et $v_n = \frac{1}{2^n - 1}$

Exemple (Contre exemple sans l'hypothèse de suite positive)**.** $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge *(cf. DM 14, en mars)*, alors que $\sum \frac{1}{n}$ diverge, et pourtant $\frac{1}{n} = o\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

2. Convergence absolue

On ne suppose plus ici que (u_n) est de signe constant.

Définition 9. On dit que $\sum u_n$ est **absolument convergente** si $\sum |u_n|$ converge.
Si $\sum u_n$ converge mais que $\sum |u_n|$ diverge, on dira que $\sum u_n$ est **semi-convergente**

Exemple. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une suite semi-convergente.

Propriété 10 (ACV ⇒ CV)**.** Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration.

Remarque. La **méthode** qui en découle : commencer par étudier l'absolue convergence - on a alors une série à termes positifs, et on peut appliquer les théorèmes précédents. Si on n'aboutit pas (la série n'est pas absolument convergente), revenir à l'étude de la série initiale, une analyse plus fine est nécessaire.

3. Une famille de référence pour les comparaisons : les séries de Riemann

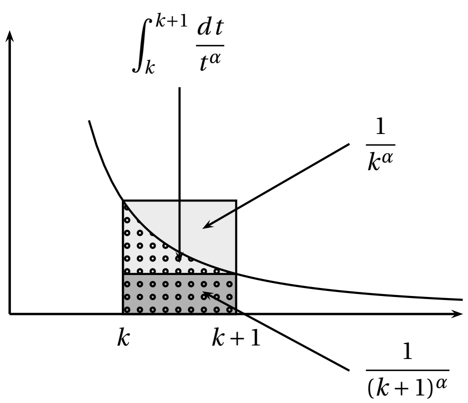
Propriété 11 (Série de paramètre α)**.** Pour α un réel, on appelle **série de Riemann** de paramètre α la série :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

♡ Cette série converge si, et seulement si, $\alpha > 1$

Démonstration. **Cas $\alpha < 0$** : série grossièrement divergente. Pour les autres cas : comprendre l'idée et connaître les étapes.

Illustration :



Exemples. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge.

Remarque. On retrouve en particulier que la série harmonique diverge, que la série des inverses des carrés converge, que la série des inverses des cubes converge

♠ *Remarque* (Séries de Bertrand)*.* On peut donc voir $\alpha = 1$ comme un seuil de convergence. On peut encore préciser ce qui se passe autour de 1 grâce à ce résultat (hors programme) :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \text{ converge ssi } \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$$

Exemple. En trouvant un équivalent simple du terme général, montrer que $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge. En reconnaissant une somme télescopique, calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

III. Calculs de sommes : séries de références

1. Séries géométriques et leurs familles

Propriété 12. Soit $q \in \mathbb{R}$. On définit les séries

1. **géométrique** de raison q : $\sum q^n$
2. **géométrique dérivée d'ordre** 1 : $\sum nq^{n-1}$
3. **géométrique dérivée d'ordre** 2 : $\sum n(n-1)q^{n-2}$

♡ Ces trois séries convergent si, et seulement si, $|q| < 1$, et alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad ; \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Démonstration.

2. Série exponentielle

♡ **Propriété 13** (Admis - voir chap. 23)**.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

♠ IV. TD : le critère de convergence de d'Alembert

Nous allons étudier **le théorème suivant** (hors programme, mais très utile) :
Soit (u_n) une suite strictement positive à partir d'un certain rang, et $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda$. Alors

- Si $\lambda < 1$, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\lambda > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.
- Si $\lambda = 1$, on ne peut rien conclure.

Ce théorème est attribué au mathématicien (et philosophe, physicien, encyclopédie) français Jean le Rond d'Alembert, à qui l'on doit aussi (à peu de choses près) le théorème de factorisation des polynômes du chapitre 11.

Exercice (Démonstration)*. Un rappel d'un résultat du chapitre précédent*

1. Nous considérons dans cette première partie le cas $\lambda < 1$.
   (a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant n_0$,
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)$$
   On notera $\mu = \frac{\lambda+1}{2}$
   (b) Montrer que pour tout $k \geqslant 0$,
   $$u_{n_0+k} \leqslant \mu^k u_{n_0}$$
   (c) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. On se placera maintenant dans le cas $\lambda > 1$. Adapter les questions précédentes, avec cette fois $u_{n_0+k} \geqslant \mu^k u_{n_0}$.
3. Nous étudions maintenant le cas $\lambda = 1$.
   (a) Étudier la série de terme général $u_n = n$
   (b) Étudier la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$
   (c) Conclure.

Exemples.

1. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{n}{2^n}$ (*sans utiliser les séries géométriques dérivées*)
2. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$
3. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$

♠ *Remarque.* D'autres critères du même acabit permettent d'établir la convergence ou divergence de séries numériques, notamment le critère de **Cauchy** et le critère de **Raabe-Duhamel** pour les suites de la forme $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$