Devoir Maison n°13 - deux annales pour les vacances !

Exercice 1 - Une suite implicite - pour compléter un exercice de TD (Edhec 2018)

Soit n un entier naturel non nul. Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = 1 - x - x^n$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue x possède une seule solution notée u_n
   f_n est clairement continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f_n(0) = 1$ et $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_n(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $\mathbb{R}_+$
2. (a) Vérifier que u_n appartient à $]0;1[$
   On a déjà dit $f_n(0) = 1 \neq 0$, donc $u_n > 0$. Par ailleurs, $f_n(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0$ donc $u_n < 1$. Ainsi, $u_n \in]0;1[$
   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite (u_n) est croissante
   $f_n(u_n) = 0$ i.e. $1 - u_n = u_n^n$. Ainsi,
   $$f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1} = u_n^n - u_n^{n+1} = u_n^n(1 - u_n)$$
   Puisque $u_n > 0$, $u_n^n > 0$ et puisque $u_n < 1$, $1 - u_n > 0$. On en déduit par produit que $f_{n+1}(u_n) > 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$ et par décroissance de f_{n+1}, $u_n < u_{n+1}$. Ainsi, (u_n) est une suite croissante.
   (c) Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0;1]$.
   D'après les questions précédentes, (u_n) est croissante et bornée donc, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers une limite ℓ. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$, à la limite $0 \leq \ell \leq 1$
   (d) Montrer par l'absurde :
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$
   Supposons par l'absurde que $\ell = \lim u_n \neq 1$, i.e. $\ell \in [0;1[$. Alors, d'un côté $1 - u_n \to 1 - \ell$ et d'autre côté $u_n^n \to 0$ (puisque $\ell < 1$). Puisque $1 - u_n = u_n^n$ pour tout n, par unicité de la limite, $1 - \ell = 0$ et donc $\ell = 1$, ce qui est une contradiction. On en déduit : $\ell = 1$.
   Jusqu'ici, c'était un exercice que nous avions fait en TD sur les suites en début d'année.
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$
   (a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer :
   $$\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$$
   Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < 1$, alors $v_n = 1 - u_n > 0$. Ceci permet de justifier que $\ln(v_n)$ est bien défini.
   De plus, par définition de u_n, $v_n = u_n^n$ et donc $\ln(v_n) = n\ln(u_n)$. Puisque $u_n \to 1$, d'après un équivalent classique, $\ln(u_n) \sim u_n - 1 = -v_n$. On en déduit donc :
   $$\ln(v_n) \sim -nv_n$$
   (b) Établir :
   $$\frac{\ln\left(-\frac{\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{\ln(v_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
   D'après ce qu'on a écrit précédemment, $-\frac{\ln(v_n)}{nv_n} \to 1$ et donc $\ln\left(-\frac{\ln(v_n)}{nv_n}\right) \to 0$. Par ailleurs, $v_n \to 0$ donc $\ln(v_n) \to -\infty$. Ce n'est pas une forme indéterminée, on trouve la limite par opérations usuelles sur les limites.
   En déduire : $\ln(v_n) \sim -\ln(n)$ **Avec une limite, ça n'a pas de sens, ni dans cette question ni dans la suivante !**
   On peut donc écrire :
   $$\frac{\ln(-\ln(v_n)) - \ln(n) - \ln(v_n)}{\ln(v_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
   Ou encore :
   $$\frac{\ln(-\ln(v_n))}{\ln(v_n)} - \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
   Or, puisque $-\ln(v_n) \to +\infty$, d'après les limites usuelles, $\frac{\ln(-\ln(v_n))}{\ln(v_n)} \to 0$. On en déduit :
   $$\frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} - 1 \to 0$$
   Ou encore, $-\frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} \to 1$, c'est-à-dire $\ln(v_n) \sim -\ln(n)$

(c) Montrer enfin : $v_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$
Utilisons les deux questions précédentes. Puisque $\ln(v_n) \sim -\ln(n)$ et que $\ln(v_n) \sim -nv_n$, par transitivité, $nv_n \sim \ln(n)$ et donc $v_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$

4. En déduire la nature des séries de termes généraux v_n et v_n^2
On n'avait pas encore travaillé ça pendant les vacances, mais on a donc un équivalent de v_n, qui permet de dire :

$$v_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$$

, or $\frac{1}{n} = o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ diverge et $\sum v_n$ diverge. De plus,

$$v_n^2 \sim \frac{\ln(n)^2}{n^2}$$

On peut utiliser les séries de Bertrand (HP!) ou de façon plus élémentaire conclure puisque $\frac{\ln(n)^2}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ que $\sum v_n^2$ converge.

Exercice 2 - Une condition suffisante pour $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ (Edhec 2016)

1. Dans cette question,id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ et f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie :

$$f \circ (f - id)^2 = 0$$

(a) Déterminer : $(f - id)^2 + f \circ (2id - f)$
On développe (puisque tous les endomorphismes commutent ici) :

$$(f - id)^2 + f \circ (2id - f) = (f^2 - 2f \circ id + id^2) + 2f \circ id - f^2 = f^2 - 2f + id + 2f - f^2 = id$$

(b) En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x = (f - id)^2(x) + (f \circ (2id - f))(x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. En évaluant l'égalité précédente en x :

$$(f - id)^2(x) + (f \circ (2id - f))(x) = id(x) = x$$

(c) Utiliser ce dernier résultat pour établir : $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \text{im}(f)$
L'espoir qu'on a, c'est que la décomposition de la question précédente soit exactement une décomposition sur $\ker(f)$ et $\text{im}(f)$. Il reste à choisir lequel est dans $\ker(f)$ et lequel est dans $\text{im}(f)$. Ici, avec l'hypothèse sur f :

$$f((f - id)^2(x)) = (f \circ (f - id)^2)(x) = 0$$

donc $(f - id)^2(x) \in \ker(f)$. Par ailleurs, $(f \circ (2id - f))(x) = f((2id - f)(x)) \in \text{im}(f)$ puisque c'est l'image de $(2id - f)(x)$. On a donc écrit x comme la somme d'un élément de $\ker(f)$ et d'un élément de $\text{im}(f)$, avec x un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$. On sait donc :

$$\mathbb{R}^n = \ker(f) + \text{im}(f)$$

Reste à montrer que la somme est directe. Soit $y \in \text{im}(f) \cap \ker(f)$. Alors, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$ et $f(y) = f(f(x)) = 0$. Or, on sait que $f \circ (f - id)^2 = 0$ et donc $f(f^2(x) - 2f(x) + x) = f^3(x) - 2f^2(x) + f(x) = 0$. Puisque $f^2(x) = 0$, et que $f^3(x) = f(f^2(x)) = f(0) = 0$, on en déduit juste : $f(x) = 0$, i.e. $y = 0$. Ainsi, $\ker(f) \cap \text{im}(f) = \{0\}$.
On aura bientôt un outil plus efficace pour conclure que la somme est directe.

2. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que : $f \circ (f - id) \circ (f - 4id) = 0$

(a) Déterminer un polynôme P du premier degré vérifiant : $\frac{1}{4}(x - 1)(x - 4) + xP(x) = 1$
Cette question n'a rien à voir avec f. On cherche P sous la forme $ax + b$. On cherche donc à résoudre pour tout x :

$$\frac{1}{4}(x - 1)(x - 4) + x(ax + b) = 1$$

En développant :

$$\frac{1}{4}(x^2 - 5x + 4) + ax^2 + bx = 1$$

et encore :

$$\left(\frac{1}{4}+a\right)x^2+\left(-\frac{5}{4}+b\right)x=0$$

On trouve : $a=-\frac{1}{4}$ et $b=\frac{5}{4}$, d'où $P(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$

(b) Utiliser ce polynôme pour établir : $\mathbb{R}^n=\ker(f)\oplus\operatorname{im}(f)$

Puisque les mêmes propriétés de calcul sont valables pour f et pour x réel, on obtient : $\frac{1}{4}(f-id)\circ(f-4id)+\frac{1}{4}f\circ(-f+5id)=id$. Pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ on a donc :

$$\frac{1}{4}((f-id)\circ(f-4id))(x)+f\circ(-f+5id)(x)=x$$

On espère que cette décomposition soit similaire à la précédente : ici, $f\circ(f-id)\circ(f-4id)(x)=0$ donc $\frac{1}{4}(f-id)\circ(f-4id)(x)\in\ker(f)$. Par ailleurs, $f\circ(-\frac{1}{4}f+\frac{5}{4}id)(x)=f((-\frac{1}{4}f+\frac{5}{4}id)(x))\in\operatorname{im}(f)$. Il suffit ensuite de montrer que la somme est directe.

3. **Généralisation**. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme dont le degré est égal à $p\geq 2$ et avec $P(0)=0$ et $P'(0)\neq 0$. On suppose $P(f)=0$ où :

$$P=\sum_{k=0}^{p}a_kx^k\Rightarrow P(f)=\sum_{k=0}^{p}a_kf^k$$

La notation f^k est à comprendre au sens de la composition (cf. cours)

(a) Montrer qu'avec l'écriture $P=\sum\limits_{k=0}^{p}a_kx^k$, on a $a_0=0$ et $a_1\neq 0$

Par hypothèse, $P(0)=0$, or $P(0)=\sum\limits_{k=0}^{p}a_k0^k=a_0$. Par ailleurs, $P'(x)=\sum\limits_{k=1}^{p}a_kkx^{k-1}$ et en évaluant en 0 : $P'(0)=a_1\neq 0$ par hypothèse.

(b) En déduire : $\ker(f)\cap\operatorname{im}(f)=\{0\}$ puis : $\mathbb{R}^n=\ker(f)\oplus\operatorname{im}(f)$

Soit $y\in\ker(f)\cap\operatorname{im}(f)$. Montrons $y=0$. Par hypothèse, $f(y)=0$ et il existe $x\in\mathbb{R}^n$ tel que $y=f(x)$,i.e. $f(f(x))=0$. Alors, pour tout $k\geq 2$, $f^k(x)=0$ par récurrence immédiate (en utilisant $f(0)=0$). Et utilisant $P(f)(x)=0$:

$$\sum_{k=0}^{p}a_kf^k(x)=0$$

et puisque pour $k\geq 2$, $f^k(x)=0$, on obtient :

$$a_0x+a_1f(x)=0\quad\text{i.e.}\quad a_1y=0\quad\text{i.e.}y=0$$

puisque $a_0=0$ et $a_1\neq 0$. Ainsi, $\ker(f)\cap\operatorname{im}(f)=\{0\}$.

(c) En quoi cette question est-elle une généralisation des deux précédentes ?

Les questions précédentes sont des cas particuliers, dans la première question avec $P(x)=x(x-1)^2=x^3-2x^2+x$, qui vérifie bien $P(0)=0$ et $P'(0)=1\neq 0$; dans la deuxième question avec $P(x)=x(x-1)(x-4)=x^3-5x^2+4x$ avec $P(0)=0$ et $P'(0)=4\neq 0$