Devoir Maison n°14

Série harmonique alternée

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

1. Justifier que les suites (I_n) et (J_n) sont bien définies.
2. Calculer la valeur de I_0 et J_0
3. (a) Justifier que la suite (I_n) est décroissante.
   (b) En déduire que (I_n) est une suite convergente.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n + 2I_{n+1} + I_{n+2}$. En déduire la limite de la suite (I_n).
4. (a) Montrer que pour tout $n > 0$, $I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$
   (b) Calculer pour tout n une expression simplifiée de $J_n + J_{n+1}$
   (c) En déduire :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n J_n = \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$
5. Montrer :
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(2)$$

Une généralisation - Critère spécial des séries alternées

Cette section est la démonstration d'un résultat hors programme mais souvent utile, en préparation d'un chapitre futur. Nous aurons besoin de plusieurs résultats sur les suites, se référer donc au cours du chapitre 5. Soit (a_n) une suite décroissante positive de réels qui tend vers 0. On pose pour tout entier n :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que la suite (S_n) converge.

1. Quelle suite (a_n) permet de faire de ce résultat une généralisation de l'exercice précédent ?
2. Montrer que la suite (S_{2n}) est croissante.
3. Montrer que la suite (S_{2n+1}) est décroissante.
4. Étudier la suite $(S_{2n+1} - S_{2n})$. En déduire que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite.
5. Montrer que la suite (S_n) converge.
6. En appliquant ce résultat, montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} \right)$ converge.