Feuilles d'exercices n°18

Exercice 6. On considère la suite définie par $u_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$

1. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{a}{n+2} + \frac{b}{n+3}$
   On vérifie aisément que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = u_n$
2. Montrer que $\sum u_n$ converge, et déterminer sa somme
   Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} u_n &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{N+3} \\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

   Ainsi, $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2}$
3. Peut-on écrire l'égalité suivante ?

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = a \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} + b \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+3}$$

   Non ! $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+3}$ n'existent pas, les deux séries étant divergentes puisque $\frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n+3} \sim \frac{1}{n}$ qui est le terme général d'une série divergente.

Exercice 9 (Encore une variante du théorème des gendarmes)**.** Soient (u_n), (v_n), (w_n) trois suites vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\sum u_n, \sum w_n$ convergent. Montrer qu'alors $\sum v_n$ converge.
Dépendamment de comment vous avez utilisé le théorème des bornes dans l'exercice 4, vous pourriez avoir besoin de ce résultat ... En soustrayant u_n à l'inégalité, on obtient pour tout n :

$$0 \leq v_n - u_n \leq w_n - u_n$$

Puisque $\sum w_n$ et $\sum u_n$ convergent, par somme $\sum(w_n - u_n)$ convergent et par comparaison (pour des séries à termes positifs), $\sum(v_n - u_n)$ converge. Or pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + (v_n - u_n)$ et est donc la somme de deux suites dont les séries convergent. Ainsi, $\sum v_n$ converge.

♢ **Exercice 10** (Majorations)**.** Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives, termes généraux de séries convergentes. En majorant habilement, montrer que $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \max(u_n, v_n)$ convergent.
Puisque (u_n) et (v_n) sont positives, pour tout n, $0 \leq \max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n$. Par ailleurs, par inégalité arithmético-géométrique, $\sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2}$ **À DÉMONTRER !**. Puisque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, $\sum(u_n + v_n)$ et $\sum \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ convergent et par comparaison, $\sum \max(u_n, v_n)$ et $\sum \sqrt{u_n v_n}$ convergent.

Exercice 11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \arctan(x) - \ln(x)$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n\pi$ admet une unique solution, notée x_n
   f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x - 1 - x^2}{x(1+x^2)}$$

   f' est donc du signe de $-x^2 + x - 1$, de discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. f' est donc de signe constant négatif, et donc f est strictement décroissante. Puisque f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, par théorème de la bijection, f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n\pi$ admet une unique solution.

2. Établir : $\lim x_n = 0$
D'après la question précédente, $x_n = f^{-1}(n\pi)$. Puisque f^{-1} est décroissante bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, $f^{-1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Or $n\pi \to +\infty$, donc par continuité de f^{-1}, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

3. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x_n \leq e^{-n}$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} f(e^{-n}) &= \arctan(e^{-n}) - \ln(e^{-n}) \\ &= \arctan(e^{-n}) + \ln(e^{n}) \\ &= \arctan(e^{-n}) + n \\ &\leq n + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Or, pour $n \geq 2$, $n + \frac{\pi}{2} \leq n + 2 \leq 2n \leq n\pi$. Pour $n = 1$, on a aussi $\frac{\pi}{2} + 1 \leq \pi$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(e^{-n}) \leq n\pi = f(x_n)$. Par décroissance de f, on a donc $x_n \leq e^{-n}$

4. En déduire la nature de la série de terme général x_n
Puisque $x_n > 0$ et que $x_n \leq e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$ (géométrique), $\sum x_n$ converge.

♠ **Exercice 12** (Séries de Bertrand - démonstration)**.** On souhaite démontrer que la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

1. En comparant avec une série de Riemann, traiter les cas
   (a) $\alpha < 1$
   Si $\alpha < 1$, notons $\alpha' = \frac{1+\alpha}{2}$. Alors, $\frac{1}{n^{\alpha'}} = o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}\right)$ (à vérifier) et $\alpha' < 1$ donc $\sum \frac{1}{\alpha'}$ diverge et $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ diverge.
   (b) $\alpha > 1$
   De même posons $\alpha' = \frac{1+\alpha}{2} > 1$. Alors $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha'}}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^{\alpha'}}$ converge donc $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge
   (c) $\alpha = 1, \beta = 0$
   C'est la série harmonique.
   (d) $\alpha = 1, \beta < 0$
   Si $\beta < 0$, $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}\right)$ donc $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ diverge

2. On se place dans le cas $\alpha = 1$ et $\beta > 0$ puisque c'est le seul cas restant, et on note S_N la somme partielle d'ordre N de la série. On pose pour $t \in]1; +\infty[$, $f(t) = \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$
   (a) Montrer :
   $$\forall N \geq 3, \int_2^{N+1} f(t)dt \leq S_N \leq \int_2^N f(t)dt + \frac{1}{2(\ln 2)^\beta}$$
   Comme dans la preuve du cours : pour tout $k \in [|2; N|]$, pour tout $t \in [k; k+1]$, par décroissance de f,
   $$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$
   Ainsi,
   $$\frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^\beta} \leq \frac{1}{t\ln(t)^\beta} \leq \frac{1}{k(\ln(k))^\beta}$$
   En intégrant l'inégalité sur $[k; k+1]$:
   $$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)^\beta} \overset{(1)}{\leq} \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)^\beta}dt \overset{(2)}{\leq} \frac{1}{k\ln(k)^\beta}$$
   En sommant l'inégalité (2) pour $k \in [|2; N|]$, on obtient par relation de Chasles :
   $$\int_2^{N+1} \frac{1}{t\ln(t)^\beta}dt \leq \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{\ln(k)^\beta}$$

i.e. $\int_2^{N+1} \frac{1}{t\ln(t)^\beta} dt \leq S_N$. D'autre part :

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k\ln(k)^\beta} \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(j+1)\ln(j+1)^\beta} \\
&= \frac{1}{2\ln(2)^\beta} + \sum_{j=2}^{N-1} \frac{1}{(j+1)\ln(j+1)^\beta} \\
&\leq \frac{1}{2\ln(2)^\beta} + \sum_{j=2}^{N-1} \int_j^{j+1} \frac{1}{t\ln(t)^\beta} dt \text{ d'après l'inégalité (1)} \\
&\leq \frac{1}{2\ln(2)^\beta} + \int_2^N \frac{1}{t\ln(t)^\beta} dt
\end{aligned}$$

(b) Conclure en séparant les cas $\beta < 1, \beta = 1$ et $\beta > 1$

— Dans le cas $\beta < 1$,

$$\begin{aligned}
S_N &\geq \int_2^{N+1} \frac{1}{t\ln(t)^\beta} dt \\
&= \left[\frac{1}{1-\beta}\ln(t)^{1-\beta}\right]_2^{N+1} \\
&= \frac{1}{1-\beta}\left(\ln(N+1)^{1-\beta} - \ln(2)^{1-\beta}\right) \\
&\xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty
\end{aligned}$$

Donc $S_N \to +\infty$ et la série diverge.

— Si $\beta > 1$,

$$\begin{aligned}
S_N &\leq \frac{1}{2\ln(2)^\beta} + \int_2^N \frac{1}{t\ln(t)^\beta} dt \\
&\leq \frac{1}{2\ln(2)^\beta} + \left[\frac{1}{1-\beta}\frac{1}{\ln(t)^{\beta-1}}\right]_2^N \\
&\leq \frac{1}{2\ln(2)^\beta} + \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{1}{\ln(N)^{\beta-1}} - \frac{1}{\ln(2)^{\beta-1}}\right)
\end{aligned}$$

La suite à droite converge donc S_N est bornée donc converge.

— Si $\beta = 1$,

$$S_N \geq \int_2^N \frac{1}{t\ln(t)} dt = [\ln(\ln(t))]_2^N = \ln(\ln(N)) - \ln(\ln(2))$$

Cette suite tend vers $+\infty$ (bien que très lentement) donc S_N tend aussi vers $+\infty$

♠ **Exercice 13** (Série des inverses des premiers)**.** On note $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite ordonnée des nombres premiers $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$, qui est infinie comme montré au TD 1). Nous allons montrer que la série $\sum \frac{1}{p_k}$ diverge. Posons pour $n \geq 1$: $V_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \geq 1$ et que donc pour tout $n \geq 1, V_n \geq 1$

   C'est évident avec $p_k \geq 2$ et V_n est le produit de nombres supérieurs à 1

2. En déduire que (V_n) converge si et seulement si $(\ln V_n)$ converge.
   $\ln(V_n)$ est bien défini puisque $V_n > 1$ et V_n ne peut pas tendre vers 0 donc $\ln(V_n)$ converge ssi V_n converge (bijectivité et continuité de ln sur $[1; +\infty[$)
3. Montrer que (V_n) converge si et seulement si $\sum \frac{1}{p_k}$ converge.
   $\ln(V_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$
   Puisque $\frac{1}{p_k} \to 0$, $\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \sim -\frac{1}{p_k}$, les deux séries ont la même nature. Ainsi, (V_n) converge ssi $\ln(V_n)$ converge ssi $\sum \frac{1}{p_k}$ converge
4. Montrer pour tout $n \geq 1$:
$$V_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j \geq 0} \frac{1}{p_k^j} \right)$$
   On le justifie car pour tout $k \in \mathbb{N}^*, p_k \geq 2$ donc $\frac{1}{p_k} \leq \frac{1}{2} < 1$ et on applique ensuite la propriété de la somme d'une série géométrique.
5. Justifier que pour tout $i \leq n$, le développement en facteurs premiers de i n'implique que des nombres premiers inférieurs ou égaux à p_n
   Par contraposée : puisque $p_{n+1} \geq n+1$, si un nombre i contient p_{n+1} dans son développement en facteurs premiers, alors $i \geq n+1$.
6. (difficile) En déduire : $V_n \geq \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$
   On cherche à développer V_n (puisque c'est un produit de sommes) : *FAIRE AU BROUILLON avec n petit et des ...*
$$\begin{aligned} V_n &= \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j \geq 0} \frac{1}{p_k^j} \right) \\ &= \sum_{j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}} \frac{1}{p_1^{j_1} p_2^{j_2} \ldots p_n^{j_n}} \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \end{aligned}$$
   En effet, dans la somme écrite en deuxième ligne, il y a tous les nombres s'écrivant avec $p_1, \ldots, p_n$ dans leur décomposition en facteurs premiers, et d'après la question 5, ceci inclut tous les nombres entre 1 et n (plus d'autres, d'où l'inégalité !)
7. Conclure sur la nature de $\sum \frac{1}{p_k}$
   Par comparaison avec la série harmonique, $V_n \to +\infty$ et donc d'après la question 3, $\sum \frac{1}{p_k}$ diverge.

Culturel : *Intuitivement, ce résultat nous donne une indication sur la répartition des nombres premiers ... On sait par exemple qu'il n'existe pas de $\alpha > 1$ tel que $p_k \geq k^\alpha$ (comparaison avec une série de Riemann), donc le k-ième nombre premier n'est «pas trop grand». Il existe un résultat plus fort, appelé* ***théorème des nombres premiers****, qui dit : $p_k \sim k \ln(k)$*