Feuilles d'exercices n°19

Exercice 3 (Rumeur)**.** Soit $p \in]0;1[$. Une rumeur se propage de la façon suivante : un premier individu à connaissance d'une information I, il la tramsmet fidèlement avec probabilité p ou la transforme en son contraire avec la probabilité $1-p$. Le deuxième individu procède de la même manière et ainsi de suite. On note P_n l'événement «le n-ième individu a reçu l'information I» et $p_n = \mathbb{P}(P_n)$.

1. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_{n+1} en fonction de p_n
   D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. $(P_n, \overline{P_n})$,
   $$\mathbb{P}(P_{n+1}) = \mathbb{P}(P_n)\mathbb{P}_{P_n}(P_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{P_n})\mathbb{P}_{\overline{P_n}}(P_{n+1}) = p_n \times p + (1-p_n)(1-p) = (2p-1)p_n + (1-p)$$

2. En déduire l'expression de p_n puis $\lim p_n$
   La suite (p_n) est donc arithmético-géométrique, de raison $2p-1$. On en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$p_n = (2p-1)^n \left(p_0 - \frac{1-p}{1-2p+1}\right) + \frac{1-p}{1-2p+1} = (2p-1)^n \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left((2p-1)^n + 1\right)$$
   Or, puisque $p \in]0;1[$, $(2p-1) \in]-1;1[$ et donc $(2p-1)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi :
   $$p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$
   À long terme, il est aussi probable d'avoir l'information I ou son contraire.

Exercice 4 (Un entier au hasard)**.** On se place sur $\mathbb{N}^*$ et on définit une probabilité en définissant pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{2^n}$. On définit pour tout entier k l'événement A_k : «le nombre tiré est un multiple de k»

1. Montrer que $\mathbb{P}$ est bien définie
   Il suffit de justifier que pour tout $n, \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{2^n} \geq 0$ et que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 1$

2. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la probabilité de l'événement A_k
   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}(A_k) &= \mathbb{P}(\{k\}) + \mathbb{P}(\{2k\}) + \mathbb{P}(\{3k\}) + \dots \\
   &= \sum_{p=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{pk\}) \\
   &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{pk}} \\
   &= \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^p \\
   &= \frac{1}{1-\frac{1}{2^k}} - 1 \\
   &= \frac{1}{2^k - 1}
   \end{aligned}$$

3. Calculer les probabilités de $A_2 \cap A_3$ et de $A_2 \cup A_3$
   Un fait intéressant d'arithmétique (le lemme d'Euclide) permet d'affirmer que n est divisible par 2 et par 3 si et seulement si n est divisible par 6, i.e. $A_2 \cap A_3 = A_6$. Ainsi :
   $$\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_6) = \frac{1}{2^6 - 1} = \frac{1}{63}$$
   Ainsi,
   $$\mathbb{P}(A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{63} = \frac{21+9-1}{63} = \frac{29}{63}$$

4. A_2 et A_3 sont-ils indépendants ?
   Il suffit de comparer $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3)$ et $\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$ pour répondre à la question. D'une part, $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{63}$ d'après la question précédente et d'autre part $\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{21} \neq \frac{1}{63}$. Ainsi, A_2 et A_3 ne sont pas indépendants.

Exercice 5. Soient $A_1, \ldots, A_n$ n événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On les suppose mutuellement indépendants et de probabilités respectives $p_i = \mathbb{P}(A_i)$. Donner une expression simple de $\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ en fonction de $p_1, \ldots, p_n$.
Cet exercice permet d'illustrer une technique pour calculer une union : on a déjà vu le cas où les événements sont incompatibles (σ-additivité) et, dans l'exercice 2, le cas où les événements ne sont pas incompatibles mais où on peut se contenter d'une majoration. On illustre ici une idée : si calculer une intersection est plus simple que calculer la probabilité d'une union, passer au complémentaire !

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\overline{A_1}) \times \ldots \times \mathbb{P}(\overline{A_n}) \text{ car les } (\overline{A_i}) \text{ sont aussi mutuellement indépendants} \\
&= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \ldots (1 - p_n)
\end{aligned}$$