Proba 4

Chapitre 20 : Variables aléatoires discrètes

Dans ce chapitre, on se place dans le cadre de $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé.

I. Premières propriétés

1. Définition

Définition 1 (Variables aléatoires réelles discrètes)**.** Une variable aléatoire réelle **discrète** est une fonction $X:\Omega\to\mathbb{R}$ qui vérifie

- $X(\Omega)=\{u_i\}_{i\in I}$ où I est une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$
- pour tout $i\in I$, $X^{-1}(u_i)$ est un événement (c'est-à-dire : $X^{-1}(u_i)\in\mathscr{A}$). Il est noté $(X=u_i)$ dans les notations probabilistes.

Remarque. Comme au chapitre 13 (à retravailler !), il faut savoir que *formellement* une variable aléatoire est une **fonction**, même si on la considère *moralement* comme un nombre aléatoire.

Remarque. En indexant $X(\Omega)$ par $I\subset\mathbb{N}$, on exclut en particulier le cas $X(\Omega)=\mathbb{R}$, au programme de deuxième année.

Exercice. On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. On appelle X le rang d'apparition du premier Pile. Modéliser cette expérience.

Propriété 2. La famille d'événements $(X=x)$ est un système complet d'événements (cf. chapitre 13). En particulier,

$$\left(\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)\right)=1$$

2. Loi

Définition 3 (Rappel)**.** On appelle **loi de la variable aléatoire** X la donnée de l'ensemble image $X(\Omega)$ et, pour tout $x\in X(\Omega)$, de $\mathbb{P}(X=x)=\mathbb{P}(X^{-1}(\{x\}))$

Remarque. Dans le chapitre 13, on représentait parfois les lois par des tableaux. Si $X(\Omega)$ est fini, de cardinal raisonnable, c'est faisable - si $X(\Omega)$ est infini, il faudra savoir écrire des formules générales …

Exemple. Déterminer la loi de X de l'exemple précédent. On note P_k l'événement «le k-ième lancer donne Pile»

Propriété 4 (Admis)**.** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le terme général d'une série convergente à termes positifs et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n=1$, il existe un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ et une variable aléatoire X avec $X(\Omega)=\mathbb{N}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=n)=u_n$

3. Cas $Y=g(X)$

Propriété 5. Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω et g une fonction définie sur $X(\Omega)$. Alors $g\circ X$ est une variable aléatoire discrète. On la note $g(X)$

Exercice. On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. On note Y une variable aléatoire qui vaut -1 si le premier Pile est atteint à un rang pair, 1 si le premier Pile est atteint à un rang impair, 0 si il n'y a que des Face. Déterminer la loi de Y.

II. Espérance, variance, premières propriétés

La plupart des résultats de cette partie sont admis dans le programme.

1. Espérance : existence

♡ **Définition 6.** Soit X une variable aléatoire discrète. Si $X(\Omega)$ est infini, on note $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ses éléments. Si $\sum x_k\mathbb{P}(X=x_k)$ converge **absolument**, alors on dit que X **admet une espérance**, et on note $E(X)$ cette espérance :

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}x_k\mathbb{P}(X=x_k)$$

Remarque. On admet que la façon de numéroter les éléments de $X(\Omega)$ n'intervient pas dans le résultat de ce calcul.

Exemples.
- Les espérances du chapitre 13 entrent dans ce cadre
- Reprenons notre exemple X du premier lancer Pile. Déterminer l'espérance de X

Remarque (Un exemple de v.a. sans espérance). On définit une v.a. X sur $\mathbb{N}$ vérifiant pour $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}(X=n) = \frac{6}{\pi^2} \times \frac{1}{n^2}$. Vérifier que X est une variable aléatoire discrète qui n'a pas d'espérance. *La valeur* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ *sera obtenue dans le DM 15*

Propriété 7 (Existence par domination - admis). Si X et Y sont deux v.a.d. vérifiant presque sûrement $0 \leqslant |X| \leqslant Y$, et si Y admet une espérance, alors X admet une espérance. Dans ce cas, $|E(X)| \leqslant E(Y)$

2. Espérance : calcul

Propriété 8 (Linéaire + positive = croissante). Soient X, Y des v.a.d. admettant une espérance, et a, b des réels.
- Si $X \geqslant 0$ presque sûrement, alors $E(X) \geqslant 0$
- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
- Si $X \leqslant Y$ presque sûrement, alors $E(X) \leqslant E(Y)$

Démonstration. Le deuxième point (linéarité) est admis.

Théorème 9 (Cas "$Y = g(X)$" : théorème de transfert - admis). Si X est une variable aléatoire discrète et g une fonction définie sur $X(\Omega)$, et si $\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(X=x)$ converge absolument, alors la v.a.d. définie par $Y = g(X)$ admet une espérance et :

$$E(Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(X=x)$$

♠ **Propriété 10** (HP mais classique). Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui admet une espérance, alors

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>n)$$

Exercice (Démonstration - inspiré de ESSEC 2016 ECE). X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
1. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=j) = \mathbb{P}(X>j-1) - \mathbb{P}(X>j)$
2. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X=j) = \left(\sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X>j)\right) - p\mathbb{P}(X>p)$$
3. On suppose que X admet une espérance μ. Montrer que $\sum_{j=p+1}^{+\infty} j\mathbb{P}(X=j) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$
4. En déduire que $p\mathbb{P}(X>p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$
5. Montrer que la série de terme général $u_j = \mathbb{P}(X>j)$ converge, puis que $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>j) = \mu$

3. Variance

Définition 11 (Variance et écart-type). Si X est une v.a.d. telle que X et X^2 aient une espérance, alors $(X-E(X))^2$ admet une espérance, et on appelle :
- $V(X) = E((X-E(X))^2)$ la **variance** de X
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ l'**écart-type** de X

On dit dans ce cas que X admet une variance.

Propriété 12. $V(X)$ est toujours un nombre positif, et si $V(X) = 0$ alors X est presque sûrement constante.

Remarque. Si X^2 admet une espérance, alors X aussi (petite preuve)

Propriété 13 (Koenig-Huygens). Si X admet une variance, alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

♣ *Démonstration.* La même qu'au chapitre 13 !

Propriété 14 (Transformation affine et normalisation - rappel du chapitre 13)**.** Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance, et soient a, b deux réels.

- $aX + b$ admet une variance et $V(aX+b) = a^2V(X)$
- $\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée-réduite.

Démonstration.

III. Nouvelles lois usuelles

1. Loi de Poisson

Exercice (Autour de la loi des événements rares)*.* Il apparaît en moyenne deux étoiles filantes toutes les 5 minutes au cours d'une nuit du mois d'août. On observe le ciel pendant 5 minutes, découpées en n intervalles de temps de même durée, supposés contenir **au plus** un passage d'étoile filante. On représente alors chacun de ces intervalles de temps comme une expérience de Bernoulli.

1. Quel paramètre p de l'expérience de Bernoulli faut-il choisir pour voir en moyenne 2 étoiles filantes au cours des 5 minutes ?
2. On appelle X_n le nombre d'étoiles filantes passées au cours des 5 minutes au complet. Déterminer pour tout entier k la probabilité de l'événement $[X = k]$
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{n!}{(n-k)!} \sim n^k$
4. Quelle est la limite de $\mathbb{P}(X_n = k)$ quand $n \to +\infty$?

Définition 15. Soit $\lambda > 0$. On dit que X suit une **loi de Poisson de paramètre** λ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$

Propriété 16. Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance et

- $E(X) = \lambda$
- $V(X) = \lambda$

Démonstration.

Exercice (Applications du théorème de transfert)*.* X suit une loi de Poisson, déterminer $E(e^X)$ et $E(\frac{1}{1+X})$

2. Loi géométrique

♡ *Exercice.* On lance une pièce truquée qui tombe sur Pile avec une probabilité 0,3 jusqu'à ce qu'on obtienne un Face.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir trois Pile lors des trois premiers lancers.
2. Déterminer la probabilité que le premier Face soit le quatrième lancer.
3. Écrire un programme Python qui simule cette expérience et affiche le rang d'apparition du premier Face.
4. Déterminer la loi du premier Face, noté X.

Définition 17. Soit $p \in]0;1[$ et $q := 1-p$. On dit que X suit une **loi géométrique de paramètre** p si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = k) = q^{k-1}p$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$

♣ *Exercice.* Vérifier que cette formule définit bien une loi de variable aléatoire discrète.

Remarque. La loi géométrique apparaît *«naturellement»* pour décrire le premier succès dans une itération d'expériences indépendantes de Bernoulli de même paramètre p.

Propriété 18. Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, alors X admet une espérance et une variance et

- $E(X) = \frac{1}{p}$
- $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Démonstration.

♠ **Théorème 19** (Caractérisation des lois sans mémoire (en exercice))**.** La loi géométrique est la seule loi qui vérifie pour tous entiers s, t la propriété : $\mathbb{P}_{(X \geqslant s)}(X \geqslant s+t) = \mathbb{P}(X \geqslant t)$

Démonstration.

1. Soit X une variable aléatoire géométrique de paramètre p, et s, t deux entiers. En remarquant que $(X \geqslant s+t) \cap (X \geqslant s) = (X \geqslant s+t)$, vérifier l'égalité annoncée.
2. Réciproquement, soit X une variable aléatoire telle que **pour tous entiers** s, t, on ait :

$$\mathbb{P}_{(X \geqslant s)}(X \geqslant s+t) = \mathbb{P}(X \geqslant t)$$

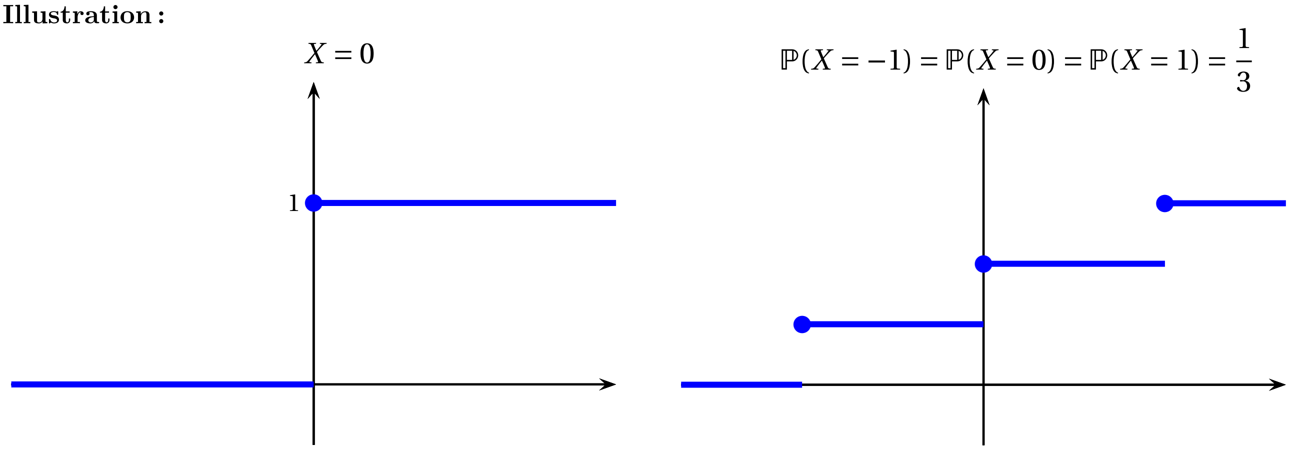
   (a) En posant $q = \mathbb{P}(X \geqslant 1)$, montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X \geqslant n) = q^n$
   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = n)$

IV. Fonction de répartition

Définition 20. Soit X une variable aléatoire discrète. On appelle **fonction de répartition** de la v.a. X la fonction :

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0;1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}(X \leqslant x) \end{array}$$

Illustration :



Exemple. Fonction de répartition d'une v.a. certaine et d'une v.a. de Bernoulli.

Exercice. Déterminer une expression de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$

Exercice. Dessiner l'allure de la fonction de répartition de la loi définie par $\mathbb{P}(X = n) = \frac{6}{\pi^2} \times \frac{1}{n^2}$ puis de $Y := \frac{1}{X}$

Propriété 21. Soit X une variable aléatoire discrète. F_X a les propriétés suivantes :

- F_X est croissante
- F_X est continue à droite : $\forall x_0 \in \mathbb{R}, F_X(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} \mathbb{P}(X \leqslant x_0) = F_X(x_0)$
- F_X admet une limite à gauche en tout réel : $\forall x_0 \in \mathbb{R}, F_X(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} \mathbb{P}(X < x_0)$
- $F_X \xrightarrow[+\infty]{} 1$ et $F_X \xrightarrow[-\infty]{} 0$

♠ *Remarque.* Il y a en fait une réciproque dans le monde des variables aléatoires (pas nécessairement discrètes) : toute fonction croissante continue à droite, qui admet une limite à gauche en chaque point, qui tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire

Propriété 22. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x_0) = F_X(x_0) - \lim\limits_{x \to x_0^-} F_X(x)$, c'est-à-dire que **la loi de X est entièrement caractérisée par F_X**

Remarque. Cet «encodage» de la loi permet une plongée des probabilités dans le monde de l'analyse (et donc d'utiliser les outils d'analyse !) Le fait de regarder $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ plutôt que $\mathbb{P}(X = k)$ est très utile pour étudier le maximum de plusieurs v.a. Ça sera bien plus utile en 2A pour les variables aléatoires à densité.

V. Indépendance ?

1. Variables aléatoires indépendantes

⚠Ici, c'est nouveau ! On n'a, jusqu'à présent, parlé que d'*événements* indépendants, et pas de variables aléatoires indépendantes.

Définition 23 (Variables aléatoires indépendantes)**.** Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes. On dit que ces variables sont mutuellement indépendantes lorsque pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, les événements $(X_i = x_i)$ vérifient :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Remarque. En général, on ne vérifie pas cette condition, on dispose de v.a. indépendantes et on **utilise** l'égalité de cette définition. Les v.a. indépendantes apparaissent naturellement dans le cadre *d'expériences indépendantes* : on dira par exemple «on tire **1000** pièces à pile ou face *de manière indépendante*».

♠ On *admet* qu'un univers permettant de modéliser cette expérience, avec des v.a. indépendantes existe.

Exemple. On lance n fois un même dé équilibré indépendamment, on note $X_1, \dots, X_n$ le résultat des n lancers.

Remarque. En pratique, on étudie souvent l'indépendance de deux variables aléatoires. La définition se reformule alors :

$$\forall (x_1, x_2) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega), \mathbb{P}(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2) = \mathbb{P}(X_1 = x_1)\mathbb{P}(X_2 = x_2)$$

2. Couples de variables aléatoires

Illustration :

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 1$					
$X = 2$					
$X = 3$					
$X = 4$					
$X = 5$					

Définition 24 (Loi conjointe, lois marginales)**.** Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes.

- La loi **conjointe** du couple est la loi de (X, Y), c'est-à-dire la donnée pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ de :

$$\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))$$

- Les lois **marginales** du couple sont les lois de X et de Y, données pour tout $x_0 \in X(\Omega)$ et pour tout $y_0 \in Y(\Omega)$ par :

$$\mathbb{P}(X = x_0) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x_0 \cap Y = y)$$

$$\mathbb{P}(Y = y_0) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x \cap Y = y_0)$$

♡ *Remarque.* La formule pour les lois marginales découle de la formule des probabilités totales. On peut donc déduire les lois marginales de la loi conjointe, mais pas réciproquement !

Exemple. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans N^2 et a un réel tels que

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}((X, Y) = (i, j)) = \frac{a}{i! 2^{i+j}}$$

1. Déterminer la loi de X et la loi de Y
2. En déduire la valeur de a
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Théorème 25 (Théorème de transfert, version couple)**.** Si f est définie sur $X(\Omega)\times Y(\Omega)$, on admet que $Z=f(X,Y)$ est une v.a.r.d.
Si Z admet une espérance, c'est-à-dire sous réserve de convergence absolue de la série :

$$E(Z)=\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} f(x,y)\mathbb{P}((X=x)\cap(Y=y))$$

Démonstration. Admis.

Exercice (minimum, somme de X et Y)*.* Soient X et Y deux variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[|1;n|]$. Déterminer la loi de $W=\min(X,Y)$, puis son espérance. Même question pour deux variables aléatoires suivant une loi géométrique de même paramètre p.

Propriété 26 (Corollaire)**.** Sous réserve d'existence,

$$(XY)=\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X=x\cap Y=y)$$

3. Cas d'un couple avec X et Y indépendantes

Propriété 27. *On a dit précédemment que la loi conjointe ne se déduisait pas des lois marginales.*
Si X et Y sont deux v.a.r.d. indépendances, alors pour tout $(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$:

$$\mathbb{P}((X,Y)=(i,j))=\mathbb{P}(X=i\cap Y=j)=\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j)$$

Démonstration. C'est seulement la définition de l'indépendance.

Propriété 28 (Espérance du produit - admis)**.** Si X et Y sont indépendantes et admettent une espérance, alors XY admet une espérance et :

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

Théorème 29 (Stabilité des lois de Poisson)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. On suppose que X et Y sont indépendantes.
Alors, $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$

♡ *Démonstration.* Savoir traduire $\mathbb{P}(X+Y=k)$

Théorème 30 (Stabilité des lois binômiales)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires suivant des lois binômiales de paramètres respectifs (n,p) et (m,p). On suppose que X et Y sont indépendantes.
Alors, $X+Y$ suit une loi binômiale de paramètres $(n+m,p)$

Démonstration.

Remarque. Cette dernière propriété s'interprète bien lorsqu'on considère les lois binômiales comme des sommes de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.

	Nom	Notation	Support $X(\Omega)$	Valeur de $P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$	Espérance	Variance
Lois finies	Loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$ $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathscr{U}(\{1,\dots,n\})$	$\{1,\dots,n\}$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
	Loi uniforme sur $\{a,a+1,\dots,b\}$ $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a \leq b$	$\mathscr{U}(\{a,\dots,b\})$	$\{a,\dots,b\}$	$\dfrac{1}{b-a+1}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$
	Loi de Bernoulli de paramètre p $p \in]0,1[$	$\mathscr{B}(p) = \mathscr{B}(1,p)$	$\{0,1\}$	$P(X=1) = p$ $P(X=0) = 1-p$	p	$p(1-p)$
	Loi binômiale de paramètres n et p $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$	$\mathscr{B}(n,p)$	$\{0,1,\dots,n\}$	$\dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Lois infinies	Loi géométrique de paramètre p $p \in]0,1[$	$\mathscr{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
	Loi de Poisson de paramètre λ $\lambda \in]0,+\infty[$	$\mathscr{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ