Linéarité de l'espérance (et autres résultats admis) - démonstration

Énoncé : soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur Ω qui admettent une espérance, et a, b deux réels. Alors $aX + bY$ admet une espérance et :

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Démonstration

La difficulté réside dans l'écriture de l'espérance, indexée par les éléments de $X(\Omega)$ dans un cas et ceux de $Y(\Omega)$ dans l'autre. On commence donc par donner une autre écriture de $E(X)$ et $E(Y)$

Lemme : $E(X)$ existe si et seulement si la série $\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$ est absolument convergente et alors $E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$. En effet, sous réserve d'existence, puisque $(X = x)$ forme un système complet d'événements :

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) &= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{\omega\in(X=x)} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{\omega\in(X=x)} x\mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} x \sum_{\omega\in(X=x)} \mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) \text{ par } \sigma\text{- additivité} \\
&= E(X)
\end{aligned}$$

On peut maintenant écrire : $E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$ et $E(Y) = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$ d'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega\in\Omega} |(aX + bY)(\omega)|\mathbb{P}(\{\omega\}) &\leq \sum_{\omega\in\Omega} \left(|a||X(\omega)| + |b||Y(\omega)|\right)\mathbb{P}(\{\omega\}) \text{ par inégalité triangulaire} \\
&\leq a\sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|\mathbb{P}(\{\omega\}) + b\sum_{\omega\in\Omega} |Y(\omega)|\mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

donc $aX + bY$ admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
aE(X) + bE(Y) &= a\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) + b\sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} \left(aX(\omega) + bY(\omega)\right)\mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} (aX + bY)(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= E(aX + bY)
\end{aligned}$$

C'est avec le même lemme qu'on démontre, par exemple, le théorème de transfert : soit X une variable aléatoire discrète et g définie sur $X(\Omega)$. Alors, sous réserve d'existence :

$$\begin{aligned}
E(g(X)) &= \sum_{\omega\in\Omega} g(X(\omega))\mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{\omega\in(X=x)} g(X(\omega))\mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{x\in X(\omega)} g(x) \sum_{\omega\in(X=x)} \mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{x\in X(\omega)} g(x)\mathbb{P}(X = x)
\end{aligned}$$

Qu'en retenir ?

1. Il est intéressant de comprendre pourquoi la propriété de linéarité, d'apparence anodine, n'est pas facile à démontrer avec l'écriture «usuelle» de l'espérance.
2. L'écriture alternative de l'espérance démontrée en lemme ici, n'a que peu d'utilité pratique. Il n'est pas nécessaire de l'apprendre par cœur, en revanche il est intéressant de comprendre comment on passe de l'une à l'autre (sur une somme finie) : *on regroupe les termes de* Ω selon la valeur de $X(\Omega)$.
3. Un travail d'approfondissement : démontrer avec la même écriture le théorème d'existence de l'espérance par domination (prop. 7 du poly)