Devoir Maison n°16 - Une chaîne de Markov

Dans ce problème, on identifie une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel. On considère **deux urnes** A et B contenant initialement une boule blanche et une boule noire chacune. On procède à une suite d'épreuves, chacune consistant à tirer au hasard une boule dans chaque urne et à les échanger d'urnes. Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans A avant la $(n+1)$-ème épreuve. On pose : $a_n = \mathbb{P}(X_n = 0), b_n = \mathbb{P}(X_n = 1), c_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$ et $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$

1. (a) Donner les valeurs de a_0, b_0, c_0
   (b) Déterminer la loi de X_1 et en déduire a_1, b_1, c_1
   (c) Que peut-on dire, à n fixé, de $a_n + b_n + c_n$? Justifier rigoureusement.
2. Soit n un entier naturel non nul. On admet que sous ces conditions, a_n, b_n, c_n sont non nuls.
   (a) Soit $(i, j) \in [|0; 2|]^2$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$
   (b) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $U_{n+1} = U_n M$
3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $E(X_{n+1})$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}) = 1$
   (b) Établir :
$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n + 2c_n = 1$$
4. On pose $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que la suite $(U_n V)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique
   (b) En déduire le terme général de $(2a_n - b_n + 2c_n)$
5. Donner la loi de X_n
6. Montrer que $(a_n), (b_n), (c_n)$ convergent vers des réels a, b, c. Interpréter.
7. On se propose de retrouver la loi de X_n par une autre méthode.
   (a) On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}
   (b) On pose $D = P^{-1}MP$. Calculer D puis les puissances de D
   (c) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = U_0 M^n$ et utiliser la matrice D pour calculer les puissances de la matrice M
   (d) En déduire la loi de X_n