Feuilles d'exercices n°20

Exercice 5. Deux joueurs s'affrontent dans un jeu de dés. Chacun des deux, à son tour, lance le dé : lorsque l'un ou l'une obtient un 6, le jeu s'arrête et cette personne gagne. Déterminer la probabilité que chacun des joueurs gagne.
Notons X le numéro du lancer auquel le premier 6 est atteint. X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$. Notons A l'événement «le/la joueur·euse 1 gagne».
Alors, $A = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (X = 2k+1)$, ces événements étant incompatibles, donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{2k} \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \frac{5^2}{6^2}} \\
&= \frac{6}{11}
\end{aligned}$$

On constate que la probabilité obtenue est un peu plus grande que $\frac{1}{2}$, ce qui est raisonnable puisque la personne joue en premier - la probabilité que l'autre gagne est de $\frac{5}{11}$.

Exercice 6. Pour une femme ayant eu entre 18 et 20 ans en 1958, le nombre d'enfants suit une loi de Poisson. Un échantillon de 1000 individus de cette population comporte 135 femmes sans enfant. En déduire une estimation du paramètre de la loi de X. Estimer la proportion de la population étudiée ayant plus de 3 enfants.
On note X une variable aléatoire dont la loi représente le nombre d'enfants par femme (la loi étant supposée identique pour chaque femme). Puisque X suit une loi de Poisson, notons λ son paramètre, et écrivons :

$$\mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$$

La donnée de l'énoncé, qui établit un parallèle entre les fréquences empiriques et les événements, nous permet donc d'écrire :

$$e^{-\lambda} \simeq \frac{135}{1000} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \simeq -\ln\left(\frac{135}{1000}\right) \simeq 2$$

Le résultat paraît raisonnable (comme ordre de grandeur en tout cas).
Pour une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre 2,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) \\
&= 1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)) \\
&= 1 - e^{-2} \times (1 + 2 + 2) \\
&= 1 - 5e^{-2} \\
&\simeq 0.32
\end{aligned}$$

Environ 32% de la population étudiée a 3 enfants ou plus.
Remarque : en français «plus de 3 enfants» est ambigu, on aurait pu comprendre $\mathbb{P}(X > 3)$ et on aurait obtenu plutôt 14%
Remarque : le $\simeq$ n'est pas très précis ... un angle d'étude des probas/stats en deuxième année est : comment faire ce genre d'approximation des paramètres, et avec quelle garantie sur la fiabilité du résultat ?

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire de loi donnée par $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = e^{-k} - e^{-k-1}$

1. Vérifier que l'énoncé définit bien la loi d'une variable aléatoire.
   Par croissance de l'exponentielle, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $e^{-k} \geq e^{-(k+1)}$ et donc $\mathbb{P}(X = k) \geq 0$. En reconnaissant un télescopage, on constate que $\mathbb{P}(X = k)$ est le terme général d'une série convergente de somme :
   $$\mathbb{P}(X = k) = 1 - \lim_{n \to +\infty} e^{-(n+1)} = 1 - 0 = 1$$
   Ainsi, la loi de X est correctement définie.
2. Montrer que la variable aléatoire $Y = 2^X$ admet une espérance et la calculer.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $2^k \mathbb{P}(X = k) = 2^k(e^{-k} - e^{-k-1}) = \left(1 - \frac{1}{e}\right)\left(\frac{2}{e}\right)^k$
   Puisque $\frac{2}{e} < 1$, on reconnaît le terme général d'une série géométrique convergente, donc Y admet une espérance :
   $$E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{e}\right)\left(\frac{2}{e}\right)^k = \left(1 - \frac{1}{e}\right)\frac{1}{1 - \frac{2}{e}} = \frac{e-1}{e-2}$$

♠ **Exercice 18** (Fonction génératrice)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$, soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[|0; n|]$. On définit G_X par :
$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)t^k$$

1. Justifier que $E(X) = G'_X(1)$
   Par linéarité, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$G'_X(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k)kt^{k-1}$$
   donc en évaluant en 1 :
   $$G'_X(1) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = E(X)$$
2. Trouver une relation entre $V(X), G''_X(1)$ et $G'_X(1)$
   Commençons par calculer $G''_X(x)$ pour x un réel quelconque :
   $$G''_X(x) = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(X = k)k(k-1)t^{k-2}$$
   donc $G''_X(1) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathbb{P}(X = k) = E(X(X-1))$ par théorème de transfert. Or, d'après la formule de Koenig Huygens,
   $$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = G''_X(1) + G'(1) - G'(1)^2$$
3. Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire binômiale.
   L'enjeu n'est bien sûr pas de réciter le résultat du cours, mais de le retrouver en utilisant la fonction génératrice introduite ci-dessus.
   Soit $n \geq 2$, $p \in]0; 1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$:
   $$\forall x \in \mathbb{R}, G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} p^k(1-p)^{n-k}x^k = (1 - p + px)^n$$
   En dérivant deux fois cette fonction (polynômiale) on obtient :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, G'_X(x) = np(1 - p + px)^{n-1} \quad \text{et} \quad G''_X(x) = np(n-1)p(1 - p + px)^{n-2}$$
   Alors, on obtient :
   $$E(X) = G'_X(1) = np$$
   $$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np((n-1)p + 1 - np) = np(1-p)$$
   On retourve les résultats du cours.

4. On suppose que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes. Montrer : $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$
Soit $t \in \mathbb{R}$. $(X+Y)(\Omega) = [|0; 2n|]$ donc :

$$\begin{aligned}
G_{X+Y}(t) &= \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}(X+Y=k)t^k \\
&= \sum_{k=0}^{2n}\sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i \cap Y=k-i)t^k \\
&= \sum_{k=0}^{2n}\sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i)t^{k-i+i} \text{ par indépendance} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n+i} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i)t^{k-i}t^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X=i)t^i \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(Y=j)t^j \text{ en posant } j=k-i \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X=i)t^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(Y=j)t^j\right) \\
&= G_X(t)G_Y(t)
\end{aligned}$$

5. Montrer que si X et Y suivent des lois binômiales de paramètres (m,p) et (n,p) **et sont indépendantes**, alors $X+Y$ suit une loi binômiale de paramètres $(m+n,p)$
On a vérifié : $G_X(t) = (1-p+pt)^n$ et $G_Y(t) = (1-p+pt)^m$ et $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = (1-p+pt)^{m+n}$ donc, en identifiant les coefficients du polynôme, $X+Y$ suit une loi binômiale de paramètres $(m+n,p)$

6. On suppose maintenant que X est à valeurs dans N et on définit : $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)t^n$. Montrer que pour tout $t \in [-1;1]$, $G_X(t)$ est bien définie.
Soit $t \in [-1;1]$. Montrons l'absolue convergence de la série de terme général $\mathbb{P}(X=n)t^n$:

$$|\mathbb{P}(X=n)t^n| = \mathbb{P}(X=n)|t|^n \leq \mathbb{P}(X=n)1^n = \mathbb{P}(X=n)$$

Or, $\mathbb{P}(X=n)$ est le terme général d'une série convergente (de somme 1) donc par théorème de comparaison, $\sum \mathbb{P}(X=n)t^n$ converge absolument. Ainsi, $G_X(t)$ est bien définie pour tout $t \in [-1;1]$

On admet que dans ce cas, G_X est une fonction dérivable sur $]-1;1[$, et qu'on peut dériver terme à terme. Si ces deux termes sont bien définis, on a alors de nouveau $E(X) = G'_X(1)$. Ces résultats, hors programme en ECG, découlent de la théorie des séries entières. *On pourrait utiliser les résultats généralisés de la partie précédente pour montrer que la somme de deux v.a. de Poisson indépendantes suit une loi de Poisson.*

Exercice 19 (Ecricome 2012 ECT)**.** On considère deux urnes notées respectivement U et V. On suppose que :

— l'urne U contient deux boules noires et deux boules blanches ;

— l'urne V contient deux boules noires, deux boules blanches et deux boules vertes.

1. On considère l'expérience suivante (E) : on tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne U. Si les deux boules sont de même couleur, on enlève ces deux boules de l'urne U. Si elles ont des couleurs différentes, on repose les deux boules dans l'urne U. Puis on recommence l'expérience jusqu'à ce que l'urne U soit vide.
On note X le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne U soit vide.
   (a) Déterminer la loi de X.
   Vu en classe : $X(\Omega) = [|2;+\infty[$ et $\forall x \geq 2, \mathbb{P}(x=k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \times \frac{1}{3}$

(b) Montrer que la variable $Z = X - 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
Vu en classe, avec paramètre $\frac{1}{3}$

(c) En déduire que X admet une espérance et une variance et déterminer leurs valeurs.
Vu en classe, avec $E(X) = 4$ et $V(X) = 6$

2. On réalise la même expérience, mais cette fois-ci dans l'urne V.
On note Y le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne V soit vide.
On désigne par B l'évènement : "au premier tirage dans l'urne V, les deux boules sont de même couleur".

(a) Calculer $P(B)$.
Il y a $\binom{6}{2} = 15$ issues possibles du premier tirage, 3 d'entre elles donnent 2 boules de la même couleur, d'où par équiprobabilité :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

(b) Déterminer $Y(\Omega)$= $[|3; +\infty[|$

(c) Calculer $P(Y = 3)$.
$Y = 3$ si et seulement si à chacun des trois premiers tirages l'urne se vide, c'est-à-dire qu'on tire deux boules de la même couleur. La probabilité d'avoir deux boules de la même couleur au premier tirage est $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{5}$. Sachant B, la probabilité d'avoir deux boules de même couleur au deuxième tirage est $\frac{1}{3}$ et alors le troisième tirage donne nécessairement deux boules de même couleur, d'où par formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(Y = 3) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{15}$$

(d) À l'aide du système complet d'évènements $(B, \overline{B})$, montrer que :
$\forall n \geqslant 3, \quad P(Y = n + 1) = \frac{1}{5}P(X = n) + \frac{4}{5}P(Y = n)$.
D'après la formule des probabilités totales dans ce système, pour tout $n \geq 3$:

$$\mathbb{P}(Y = n + 1) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(Y = n + 1) + \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}_{\overline{B}}(Y = n + 1)$$

On connaît $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{5}$ et $\mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{4}{5}$. De plus, en supposant qu'on tire dès la première étape un couple de boules de même couleur, on se ramène à l'urne U. Ainsi, $\mathbb{P}_B(Y = n+1) = \mathbb{P}(X = n)$. Finalement, si on ne tire pas des boules de la même couleur, on est de retour avec l'urne V et seulement n étapes pour vider l'urne, d'où $\mathbb{P}_{\overline{B}}(Y = n + 1) = \mathbb{P}(Y = n)$ et finalement :

$$\mathbb{P}(Y = n + 1) = \frac{1}{5}\mathbb{P}(X = n) + \frac{4}{5}\mathbb{P}(Y = n)$$

(e) Montrer alors : $\forall n \geqslant 3, \quad P(Y = n) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right)$.
La formule se montre par récurrence à l'aide de la formule de récurrence trouvée à la question précédente.

(f) La variable Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
$n\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}$ et $n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ sont des termes généraux de séries convergentes (géométriques dérivées

de raison strictement inférieures à 1) donc Y admet une espérance :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{n=3}^{+\infty} n\mathbb{P}(Y=n) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} - n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\left(\frac{1}{(1-\frac{4}{5})^2} - 1 - 2\times\frac{4}{5}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} - 1 - 2\times\frac{2}{3}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\times\frac{112}{5} - \frac{3}{2}\times\frac{20}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2}(28-10) \\
&= 9
\end{aligned}$$

Il faut en moyenne 9 étapes pour vider l'urne V. C'est assez raisonnable puisqu'avec $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{5}$, il faut en moyenne 5 étapes pour se ramener à l'urne U, puis 4 étapes pour vider l'urne U (d'après la première partie)

♠ **Exercice 20** (Formule du crible, secret Santa)**.** La classe d'ECG1 organise un «Secret Santa». Il y a n participant·es (pour simplifier). Chaque personne tire un papier au hasard. On modélisera cette expérience en choisissant comme univers Ω l'ensemble des permutations de $[|1;n|]$ (bijections de $[|1;n|]$ dans $[|1;n|]$, associant à chaque personne le papier tiré). On prendra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, puisqu'on est en univers fini.

1. Déterminer le cardinal de Ω
   $|\Omega| = n!$ (d'après el cours)
2. Pour tout $i \in [|1;n|]$, on note A_i l'événement «la i-ème personne repart avec son chapeau». Justifier : $\mathbb{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}$
   Parmi les $n!$ permutations de Ω, intéressons-nous à celles uqi laissent i fixe. Il y a alors $n-1$ «personnes» à permuter, soit $(n-1)!$ permutations qui laissent i fixe. Par équiprobabilité, $\mathbb{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$
3. Plus généralement, si $k \in [|1;n|]$, et si $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$, interpréter l'événement $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ puis calculer sa probabilité.
   De la même manière, si $i_1, \ldots, i_k$ sont fixes, il reste $n-k$ variables à permuter, d'où :
   $$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$$
4. En déduire la probabilité de $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. On utilisera pour ce faire le résultat (admis) :
   $$\forall n \geq 2, \forall (A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}^n, \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})\right)$$
   Cette formule est appelée formule du crible (de Poincaré). C'est la généralisation de nos formules pour $\mathbb{P}(A\cup B), \mathbb{P}(A\cup B\cup C)$

On utilise la formule donnée et le résultat des questions précédentes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}) \textbf{(c'est une somme } k\textbf{-uple !)} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \frac{(n-k)!}{n} \textbf{ d'après la question précédente} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} \textbf{ car } \frac{(n-k)!}{n}! \textbf{ ne dépend pas des } i_1,\ldots,i_k \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}
\end{aligned}$$

5. Conclure en donnant la probabilité que «le Secret Santa se passe bien», c'est-à-dire que personne ne tire son propre nom.
   Personne ne tire son propre nom si la permutation n'a pas de point fixe, c'est-à-dire : c'est le complémentaire de $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ donc de probabilité $p_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$
6. Quand n est grand, donner une approximation de cette probabilité.
   On reconnaît la série exponentielle ... $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$
   Quand n est grand il y a donc environ 37% de chances que le tirage se passe bien du premier coup !
7. Vérifier que la formule du crible (admise) correspond à une formule connue pour $n = 2$ et $n = 3$