Chapitre 21 : Dimension des espaces vectoriels

Algèbre 5

Dans ce qui suit, sauf précision contraire, E est un espace vectoriel quelconque. Dans ce chapitre, aucune démonstration n'est officiellement exigible.

I. Construction de la dimension

1. Premiers exemples : dimension 1 et 2

Définition 1 (Droite vectorielle, plan vectoriel).

- On dit que E est une **droite** si il existe $u \neq 0$ tel que $E = \mathrm{Vect}(u) = \{\lambda u | \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- On dit que E est un **plan** si il existe (u, v) non colinéaires tels que $E = \mathrm{Vect}(u, v) = \{\lambda u + \mu v | (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

Exemple. $\mathbb{R}$ est une droite, $\mathbb{R}^2$ un plan. $E_1 = \mathrm{Vect}(1) \subset \mathbb{R}_n[x]$, $\quad E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + 3y - z = 0\}$

Propriété 2. Si E est une droite, alors toute base de E est constituée d'un seul vecteur. De même pour les plans, toutes les bases sont constituées de deux vecteurs.

Démonstration.

Remarque. On veut généraliser cette idée à la dimension $3, 4, \ldots$: la dimension est le nombre de vecteurs qui constituent une base. Encore faut-il justifier que ce nombre de vecteurs **ne dépend pas** du choix de la base !

2. Rappels : familles libres, liées, génératrices, bases

Définition 3 (Rappels). Soit $\mathscr{F} = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E

- $\mathscr{F}$ est libre si :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0\right] \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

- $\mathscr{F}$ est liée si elle n'est pas libre
- $\mathscr{F}$ est génératrice si :

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = x$$

- $\mathscr{F}$ est **une base** de E ssi elle est libre et génératrice.

Exemples.

- Une famille de 1 vecteur est libre ssi ce vecteur est non nul, de deux vecteurs ssi les vecteurs ne sont pas colinéaires, de 3 ssi les vecteurs ne sont pas coplanaires
- $((1,0), (1,1), (2,3))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$
- $((0,2,0), (-1,3,0))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$
- $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base (la base canonique !) de $\mathbb{R}_n[X]$

Propriété 4. $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée si et seulement si un des vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire qu'il existe $i \in [|1; n|]$ tel que : $x_i \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Dans ce cas :

$$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

Démonstration.

Propriété 5. Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors chaque élément x de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}$, et réciproquement :

$$\forall x \in E, \exists! (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

On dit que les x_i sont les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$

Exemple. Déterminer les coordonnées du vecteur $(1,0)$ dans la base $((2;1);(-1;3))$

3. Théorème de la base extraite, théorème de la base incomplète

♡ **Théorème 6** (Base extraite)**.** Si $\mathscr{G}=(x_1,\dots,x_n)$ est une famille génératrice de E, alors elle contient une base de E

Exercice. Extraire une base de $\mathscr{G}=((-1;2;3);(2;0;2);(-3;1;-1);(4;6;1))\subset\mathbb{R}^3$

♡ **Théorème 7** (Base incomplète)**.** Si E admet au moins une base et que $\mathscr{L}=(x_1,\dots,x_n)$ est une famille libre de E, alors il existe une manière de compléter $\mathscr{L}$ en une base de E.

Exercice. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ contenant $\mathscr{L}=((-1;0;4);(2;1;0))$

Démonstration. Non exigible, culturel :

1. **Théorème de la base extraite** Montrons ce résultat par récurrence sur n.
   - Si $n=1$, alors $\mathscr{G}=(x_1)$ est une famille génératrice de E.
     Si $x_1=0_E$, alors $E=\mathrm{Vect}(0)=\{0\}$ et l'ensemble nul admet $\varnothing\subset\mathscr{G}$ comme base.
     Si $x_1\neq 0_E$, alors $E=\mathrm{Vect}(x_1)$ et (x_1) est une famille libre, donc une base de E, extraite de $\mathscr{G}$. La propriété est initialisée.
   - Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que pour tout espace vectoriel E et toute famille $(x_1,\dots,x_n)$ génératrice de E on puisse extraire une base. Soit $\mathscr{G}=(x_1,\dots,x_{n+1})$ une famille génératrice de E.
     Si $\mathscr{G}$ est libre, alors $\mathscr{G}$ est une base, et on a terminé.
     Si $\mathscr{G}$ est liée, alors il existe un vecteur pouvant s'écrire comme combinaison linéaire des autres. Supposons, quitte à réordonner, que $x_{n+1}\in\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$. Alors, $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_{n+1})=\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$. Ainsi, $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille génératrice de E composée de n vecteurs. **Par hypothèse de récurrence**, il existe une base de E extraite de $(x_1,\dots,x_n)$ et la propriété est héréditaire.
   - Ainsi, pour tout entier n, toute famille $(x_1,\dots,x_n)$ génératrice de E contient une base de E.
2. **Théorème de la base incomplète** Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E. Alors
   - Si $\mathscr{L}$ engendre E, alors c'est une base de E et on a terminé.
   - Si $\mathscr{L}$ n'engendre pas E, alors il existe au moins un vecteur e de $\mathscr{G}$ qui n'est pas dans $\mathrm{Vect}(\mathscr{L})$ (car $\mathscr{G}$ engendre E !). Alors $\mathscr{L}\cup\{e\}$ est toujours une famille libre. On réitère ce procédé jusqu'à obtenir une famille génératrice. Puisque $\mathscr{G}$ est une famille finie, l'algorithme termine, et à ce moment là $\mathscr{L}$ est une base.

4. Outils pour la dimension

Théorème 8. Si $\mathscr{G}=(e_1,\dots,e_n)$ est une famille génératrice de E, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

♣ *Démonstration.* Admise : par récurrence - initialisation en classe avec $n=1$ pour comprendre de quoi on parle.

Théorème 9 (Corollaire)**.** Si $\mathscr{L}=(x_1,\dots,x_n)$ est libre et $\mathscr{G}=(e_1,\dots,e_p)$ génératrice, alors $n\leqslant p$

Définition 10 (Dimension)**.** Soit E un espace de dimension finie, c'est-à-dire qui admet au moins une base. Alors, toutes les bases ont le même cardinal n. On appelle n la **dimension de** E.

Démonstration. Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont des bases, appliquer le théorème admis précédent.

Exemples.
- Un espace de dimension 0 est nul : $\{0\}=\mathrm{Vect}(\varnothing)$
- $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, $\mathscr{M}_{3;1}(\mathbb{R})$ aussi.
- $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|2x+3y-z=x-y+2z=0\}$ est de dimension 1
- L'ensemble des matrices symétriques de taille 3 est de dimension 6.

Propriété 11 (Caractérisation des bases)**.** Si $\mathscr{F}$ est une famille de n vecteurs dans un espace E de dimension n, alors il y a équivalence entre

1. $\mathscr{F}$ est libre
2. $\mathscr{F}$ est génératrice
3. $\mathscr{F}$ est une base

Remarque. En pratique, on se contentera donc de montrer qu'une famille est libre et qu'elle a le bon cardinal !

Exemple. $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3;1}(\mathbb{R})$.

On peut exprimer les vecteurs de la base canonique dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice.

1. Montrer que $\mathscr{B}_1 := ((2;-1),(4;3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$
2. Montrer que $\mathscr{B}_2 := \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_{2;2}(\mathbb{R})$

♡ **Définition 12** (Rang)**.** Si $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_p)$, on appelle **rang de $\mathscr{F}$** la dimension de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

Remarque. Cette dimension est inférieure ou égale à p. C'est la taille de la plus grande sous-famille libre de $\mathscr{F}$.

Exemple. Rang de la famille $\mathscr{F} = ((-1,1),(2,0),(3,1))$

5. Dimension des espaces usuels

Une relecture des bases canoniques du chapitre 15 (à connaître !)

- $\mathbb{R}^n$ est de dimension n
- $\mathbb{R}_n[x]$ est de dimension $n+1$ (penser aux fonctions affines !)
- $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2
- Plus généralement, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension $n \times p$
- $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}[x]$ sont de dimension infinie

Remarque. Penser la dimension comme un nombre de «degrés de liberté» : paramètres sur lesquels je peux agir sans contrainte.

Exercice (Un résultat admis depuis le chapitre 5 ... et cette idée de «degrés de liberté»)*.* On note $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
2. Justifier qu'il est raisonnable de penser que F est de dimension 2
3. Montrer que $u_1 = \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $u_2 = \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux vecteurs linéairement indépendants de F
4. En déduire que (u_1, u_2) forme une base de F et en déduire la forme générale des éléments de F

II. Dimension d'un sous-espace vectoriel

On suppose désormais que E est un espace vectoriel de dimension n

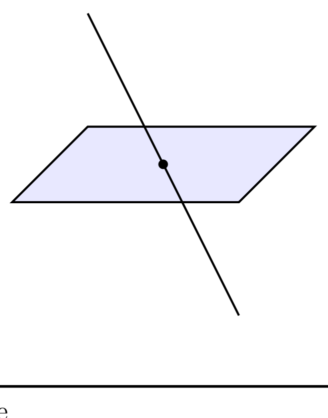
Propriété 13.

- Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie, et $\dim(F) \leqslant n$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de E et que $\dim(F) = n$, alors $F = E$

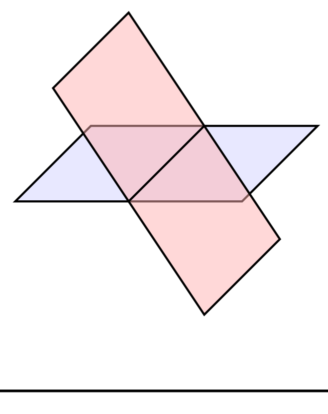
1. Sommes de sous-espaces vectoriels

Illustration : Dans les deux exemples, $F + G = \mathbb{R}^3$

$F \cap G = \{0\}$



$F \cap G$ est une droite



Définition 14 (Rappel)**.** Si F, G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on définit :

$$F+G=\{x+y|(x,y)\in F\times G\}$$

Un élément de $F+G$ est la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G

♡ **Théorème 15** (Formule de Grassmann)**.** Soient F,G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$$

Démonstration. En complétant une base de $F\cap G$ («concaténation des bases» à comprendre)

Propriété 16 (Cas particuliers)**.** Si F,G sont deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe, alors

$$\dim(F\oplus G)=\dim(F)+\dim(G)$$

Si en particulier F et G sont supplémentaires, alors $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)=n$

♡ **Propriété 17** (Inspiré de la démonstration)**.** Si $F=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$ et $G=\mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_q)$ alors :

$$F+G=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p,f_1,\dots,f_q)$$

Exemple. $((1,0,0),(0,1,0))$ est une base de $\mathrm{Vect}((1,0,0))+\mathrm{Vect}((0,1,0))$ (dessin !)

2. Supplémentaires

Propriété 18. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors il y a équivalence entre :

1. F et G sont supplémentaires dans E
2. $F\cap G=\{0\}$ et $\dim(F)+\dim(G)=n$
3. $F+G=E$ et $\dim(F)+\dim(G)=n$

Démonstration. Par concaténation des bases.

Propriété 19 (Variante avec k sous-e.v.)**.** Si $F_1,\dots,F_k$ sont des sous-espaces vectoriels de E, il y a équivalence entre :

1. $E=\bigoplus_{i=1}^{k}F_i$
2. $E=\sum_{i=1}^{k}F_i$ et $\sum_{i=1}^{k}\dim(F_i)=n$

Théorème 20 (Tout sev admet un supplémentaire)**.** Si E est de dimension finie et que F est un sous-espace vectoriel de E, alors F admet un supplémentaire G et $\dim(G)=n-\dim(F)$

Remarque. Et si F n'est pas de dimension 0 ou n, il admet même plusieurs (une infinité de) supplémentaires.

Exemple. Déterminer un supplémentaire de $G=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4|a+b-d=0\}$

Exercice (Vrai / Faux). Dans $\mathbb{R}^3$:

1. Deux droites sont toujours supplémentaires l'une de l'autre
2. Deux droites peuvent être supplémentaires l'une de l'autre
3. Deux plans sont toujours supplémentaires l'un de l'autre
4. Deux plans peuvent être supplémentaires l'un de l'autre
5. Une droite et un plan sont toujours supplémentaires l'un de l'autre
6. Une droite et un plan peuvent être supplémentaires l'un de l'autre