Devoir surveillé n°5 du 28 mars

Calculatrice interdite. Tous les résultats doivent être soigneusement justifiés, que l'énoncé le précise ou non. La présentation et la rédaction sont centrales dans l'appréciation d'une copie. Le barême est indicatif et peut être modifié.

Check-list avant de rendre la copie :

- ☐ Copie tenue bras tendu : on voit les changements d'exercices et de questions.
  Pour ce faire, sauter une ligne entre les questions, encadrer les noms des exercices.
- ☐ Copie tenue bras tendu : copie aérée et lisible.
  Mettre une marge si il n'y en a pas sur la feuille, sauter des lignes si besoin, soigner la calligraphie (si besoin, écrire plus gros, sur les lignes, changer de stylo), éviter les longs paragraphes : aller à l'argument principal.
- ☐ Pages numérotées et rangées dans l'ordre.
- ☐ Exercices et questions numérotées.
- ☐ Résultats encadrés.
  À la règle, et sans surligneur.
- ☐ Phrases réponses, noms de théorèmes soulignés.
- ☐ Pas ou peu de ratures.
  Si c'est le cas, barrer proprement la question concernée, la séparer du reste du texte par deux lignes horizontales et recommencer proprement. Penser à utiliser un brouillon pour les calculs !
- ☐ Variables introduites par "soit" (quand c'est nécessaire).
  Par exemple, f ou (u_n) sont en général des variables introduites dans l'énoncé alors que x, n ne le sont pas. Les variables muettes utilisées dans une phrase quantifiée, les variables de sommation, n'ont pas besoin d'être introduites par "soit".
- ☐ Syntaxe et orthographe correctes.
  Faire en particulier attention aux mots "mathématiques" (noms de mathématiciens dans les théorèmes, termes techniques comme "asymptote", "dérivabilité"...)
- ☐ Modes de raisonnements / étapes indiquées.
  On ne ré-écrit pas l'énoncé, mais on précise "montrons maintenant que (...)", "étudions la limite de (...)" et "raisonnons par analyse-synthèse/l'absurde/récurrence/double implication..."

Problème 1 - Matrices productives (EM Lyon 2004) - 40 pts

Notations :

— On dira qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $M \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ est **positive** (resp. strictement positive), noté $M \geq 0$ (resp. $M > 0$), si tous ses coefficients sont positifs (resp. strictement positifs).

— Si M, N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou deux matrices de $\mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$, on notera $M \geq N$ (resp. $M > N$) si $M - N \geq 0$ (resp. $M - N > 0$).

— Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **productive** si et seulement si M est positive **et** il existe une matrice positive $P \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ telle que $P > MP$

1. **Premiers exemples**

   (a) En considérant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer que la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est productive.

   (b) Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas productive.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

   (a) Montrer que si M est positive alors pour toute matrice positive $X \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$, MX est positive.

   (b) Réciproquement, montrer que si pour toute matrice positive $X \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$, $MX \geq 0$, alors M est positive.
   Indication : on pourra choisir des matrices positives X «simples»

3. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ positive telle que $P - AP > 0$

   (a) Montrer que $P > 0$

   (b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geq AX$. On note $x_1, \ldots, x_n$ les coefficients de X. On note $c = \min\limits_{j=1,\ldots,n} \frac{x_j}{p_j}$, et k un indice tel que $c = \frac{x_k}{p_k}$.
   Montrer que $c\left(p_k - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}p_j\right) \geq 0$. En déduire que $c \geq 0$ puis que X est positive.

   (c) Soit $X \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ telle que $X = AX$. En remarquant que $-X = A(-X)$, montrer que $X = 0$. En déduire que $I_n - A$ est inversible.

   (d) Montrer que pour toute matrice positive $X \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$, la matrice $Y = (I_n - A)^{-1}X$ est positive. En déduire que $(I_n - A)^{-1}$ est positive.

4. Dans cette question, on considère une matrice positive $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n - B$ soit inversible et $(I_n - B)^{-1}$ positive. On note $V = (I_n - B)^{-1}U$, où U est la matrice de $\mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que $V - BV > 0$. Qu'en déduit-on sur B ?

5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit productive.

6. Que fait la fonction suivante ?

```python
import numpy as np
def mystere(M):
    b = True
    n,p = np.shape(M)
    for i in range(n):
        for j in range(p):
            if M[i,j] < 0:
                b = False
    return b
```

7. En utilisant la fonction de la question précédente, écrire une fonction `is_productive(M)` qui prend en entrée une matrice `M` (`np.array`) et renvoie `True` si M est productive, `False` sinon.
   On pourra utiliser la fonction `numpy.linalg.det` qui renvoie 0 si une matrice n'est pas inversible.
8. **Application** Soit M une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2M^2 = M$. Vérifier que $(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n$ et en déduire que M est productive.

Problème 2 - Autour de la dérivation de séries

A - Séries géométriques dérivées - 28 pts

L'objectif de cette section est d'établir pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$$

1. Montrer pour tout $p \in \mathbb{N}$:
$$\binom{k}{p} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k^p}{p!}$$
2. Soit $x \in]-1;1[$ et $\lambda = \frac{|x|+1}{2}$. Montrer que $\binom{k}{p}|x|^k \underset{k\to+\infty}{=} o(\lambda^k)$
3. En déduire la convergence de la série $\sum \binom{k}{p} x^k$
4. On définit, pour $x \in]-1;1[$, $S_p(x) = \sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k$
   (a) Calculer $S_0(x), S_1(x), S_2(x)$
   (b) À l'aide de la formule du triangle de Pascal, montrer que pour tout $x \in]-1;1[$:
   $$(1-x)S_{p+1}(x) = xS_p(x)$$
   (c) Conclure.
5. Soit X une variable aléatoire vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2^n}$. Soit Y une variable aléatoire qui, sachant $X = n$, suit une loi binômiale de paramètres $(n, \frac{1}{2})$.
   (a) En utilisant la formule des probabilités totales, décrire la loi de Y
   (b) En utilisant le résultat de la question précédente, simplifier pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'expression de $\mathbb{P}(Y = k)$

B - Généralisation : dérivation sous le signe somme (inspiré de ESSEC 2018) - 39 pts

Soit (a_n) une suite de réels et $R > 0$ telle que $a_n R^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

1. Montrer que pour tout $0 < r < R$, $\sum |a_n| r^n$ converge.
   Indication : on pourra penser à écrire $|a_n| r^n = |a_n| R^n \left(\frac{r}{R}\right)^n$
2. Montrer de la même manière que pour tout $r \in]0;R[$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum n^k |a_n| r^n$ converge.
3. Vérifier que $f_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est bien définie sur $]-R;R[$
4. Soit $r \in]0;R[$, $x \in [-r;r]$ et h un réel tel que $x + h \in [-r;r]$. Montrer que pour tout entier naturel n :
$$|(x+h)^n - x^n| \leq n r^{n-1} |h|$$
5. Justifier alors soigneusement :
$$|f_a(x+h) - f_a(x)| \leq \frac{1}{r} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n |a_n| r^n \right) |h|$$

6. Montrer alors que f_a est continue sur $[-r;r]$ puis sur $]-R;R[$
7. **Caractère $\mathcal{C}^1$**. On considère ici un réel $r \in]0;R[$ et $x \in [-r;r]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et sous réserve d'existence : $g_a : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$
   (a) En utilisant les questions précédentes, montrer que g_a est définie et continue sur $]-R;R[$
   (b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = a_0 + \int_0^x S_n'(t)dt$
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\left|\int_0^x (g_a(t) - S_n'(t))dt\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k|r^k$$
   (d) En déduire :
   $$f_a(x) = a_0 + \int_0^x g_a(t)dt$$
   (e) En déduire finalement que f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R;R[$ avec $f_a' = g_a$

C - Fonction génératrice (inspiré de ESSEC 2018 et CentraleSupélec 2024 TSI) - 27 pts

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On posera pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \mathbb{P}(X = n)$ et $G_X : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, autrement dit $G_X = f_a$.

1. Montrer que $G_X(t) = E(t^X)$
2. Calculer G_X si X suit une loi uniforme sur un ensemble $[|1;N|]$
3. Calculer G_X si X suit une loi binômiale de paramètres $N \in \mathbb{N}, p \in]0;1[$
4. Justifier que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
5. En déduire qu'il existe un réel $R \geq 1$ tel que G_X soit définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R;R[$. Exprimer G_X'.
6. Montrer que si $\mathbb{R} > 1$, alors $G_X'(1) = E(X)$
7. **Premier exemple** Supposons que X suit une loi de Poisson de paramètre 1.
   (a) Montrer que G_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer G_X et $G_X'(1)$
8. **Deuxième exemple** Soit $p \in]0;1[$ et $q = 1 - p$. On suppose que $X + 1$ suit une loi géométrique de paramètre p.
   (a) Montrer que G_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\frac{1}{q};\frac{1}{q}\right[$
   (b) Déterminer la suite (a_n) puis la fonction G_X. Calculer $G_X'(1)$
9. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que G_X et G_Y sont définies sur $]-R;R[$. On cherche à montrer : $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \mathbb{P}(X = k)$ et $b_k = \mathbb{P}(Y = k)$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k)$
   (b) Montrer que pour tout $x \in]-R;R[$, $G_X(x)G_Y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_k b_j x^{k+j}$ puis, avec un changement d'indices,
   $$G_X(x)G_Y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n$$
   On s'autorisera à échanger deux sommes infinies sans justification.
   (c) Conclure.