Devoir surveillé n°5 du 28 mars

Problème 1 - Matrices productives (EM Lyon 2004)

Notations :

— On dira qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $M \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ est **positive** (resp. strictement positive), noté $M \geq 0$ (resp. $M > 0$), si tous ses coefficients sont positifs (resp. strictement positifs).

— Si M, N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou deux matrices de $\mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$, on notera $M \geq N$ (resp. $M > N$) si $M - N \geq 0$ (resp. $M - N > 0$).

— Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **productive** si et seulement si M est positive **et** il existe une matrice positive $P \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ telle que $P > MP$

1. **Premiers exemples**

   (a) U est clairement positive. (1 pt) Calculons :

$$\begin{aligned} AU &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &< U \end{aligned}$$

   (1 pt) Ainsi, il existe une matrice positive U telle que $U > AU$: A est productive. (1 pt)

   (b) C'est-à-dire montrons que pour toute matrice $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \geq 0$, on n'a pas $P > BP$.(1 pt) Calculons donc :

$$\begin{aligned} BP &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + 4b + c \\ 2a + b + 3c \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   (1 pt) Donc, $P > BP$ si et seulement si :

$$\begin{cases} a + 4b + c < a \\ 2a + b + 3c < b \\ c < c \end{cases}$$

   La dernière ligne est déjà impossible, mais on peut simplifier par a et b dans les deux premières lignes et obtenir 3 contradictions.(1 pt) Ainsi, B n'est pas productive.
   On pourrait aussi rédiger ça par l'absurde, plutôt que par équivalences.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(a) Soient $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = (x_k) \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ deux matrices positives. Montrons que MX est positive. (1 pt) Soit $k \in [|1;n|]$. D'après la définition du produit :

$$(MX)_k = \sum_{j=1}^{n} m_{kj}x_j$$

puisque chaque m_{kj} est positif et que chaque x_j est positif, par produit et somme $(MX)_k \geq 0$ et donc $MX \geq 0$ (2 pt)

(b) Soit M une matrice telle que pour toute matrice positive $X \in \mathcal{M}_{n;1}$, MX soit positive. Posons pour tout $i \in [|1;n|]$, $X_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ la matrice qui ne contient que des 0 et un 1 en i-ème position (1 pt).

Alors, X_i est clairement positive et donc par hypothèse, MX_i est positive. (1 pt) Or, on vérifie aisément que MX_i est la matrice colonne qui correspond aux coefficients de la i-ème colonne de M. Ainsi, pour tout i, les coefficients de la i-ème colonne de M sont positifs : M est une matrice positive. (1 pt)

3. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ telle que $P - AP > 0$

(a) D'après la question précédente, si P est positive, et A positive (car productive), AP est positive (1 pt). Ainsi, pour tout $k \in [|1;n|]$, $p_k - (AP)_k > 0$ avec $(AP)_k > 0$. On en déduit que $p_k > 0$ et ceci étant vrai pour tout $k \in [|1;n|]$: $P > 0$ (1 pt)

(b) Remarquons d'abord que c existe comme minimum d'un ensemble fini. Par hypothèse, $X - AX \geq 0$, donc en particulier :

$$\begin{aligned} & (X - AX)_k \geq 0 \\ \text{i.e.} \quad & x_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \geq 0 \\ \text{i.e.} \quad & cp_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}p_j\frac{x_j}{p_j} \geq 0 \end{aligned}$$

Or, pour tout $j \in [|1;n|]$, $\frac{x_j}{p_j} \geq c$ (1 pt) donc, puisque pour tout j, $a_{kj}p_j \geq 0$:

$$cp_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}cp_j \geq cp_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}p_j\frac{x_j}{p_j} \geq 0$$

On conclut en factorisant par c. (2 pt) Il reste à montrer que X est une matrice positive. Puisque $P - AP > 0$, alors $p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}p_j > 0$ et par «règles des signes», $c \geq 0$. Ainsi, pour tout $j \in [|1;n|]$, $\frac{x_j}{p_j} \geq c \geq 0$ et donc $x_j \geq 0$ (2 pt)

(c) Puisque $X = AX$, en particulier $X - AX \geq 0$. D'après la question précédente, on en déduit $X \geq 0$. (1 pt) En suivant l'indication, on peut ajouter $-X = -AX = A(-X)$, donc $(-X) \geq 0$ d'après la question précédente. Ceci implique $X \leq 0$ (1 pt) et donc $X = 0$ (1 pt)

Ainsi, la seule solution de l'équation $(A - I_n)X = 0$ est $X = 0$, ce qui implique que $A - I_n$ est inversible. (résultat du cours !) (2 pt)

(d) On suppose que X est positive et que $Y = (I_n - A)^{-1}X$. Alors, $X = (I_n - A)Y = Y - AY \geq 0$. Ainsi, $Y \geq 0$ (d'après le résultat de la question b : si $Y - AY \geq 0$, alors $Y \geq 0$!) (2 pt)

D'après la question 2, $(I_n - A)^{-1}$ est positive. (1 pt)

4.

$$\begin{aligned} V - BV &= (I_n - B)^{-1}U - B(I_n - B)^{-1}U \\ &= (I_n - B)(I_n - B)^{-1}U \\ &= U \\ &> 0 \end{aligned}$$

(2 pt) Ainsi, $V - BV > 0$ et V est positif puisque $(I_n - B)^{-1}$ et U le sont (1 pt). Donc, B est productive. (1 pt)

5. Au vu des questions c et d, on sait qu'une matrice M est productive si et seulement si $(I_n - M)$ est inversible et $(I_n - M)^{-1}$ positive. (2 pt)
6. La fonction renvoie True si M est positive et False sinon. (2 pt)

```
import numpy.linalg as al
n,p = np.shape(M)
I = np.eye(n,p)
def is_productive(M):
    if not mystere(I-M) or al.det(I-M) == 0:
        return False
    elif mystere(al.inv(I-M)):
        return True
    else:
        return False
```

(par exemple) (3 pt)

7.

$$(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n - M + 2M - 2M^2 = I_n + M - M = I_n$$

On en déduit que $I_n - M$ est inversible. (1 pt) Il reste à vérifier que $(I_n - M)^{-1}$ est positive. On a trouvé $(I_n - M)^{-1} = I_n + 2M$. Or, $I_n \geq 0$ et par hypothèse $M \geq 0$ donc $2M \geq 0$ et ainsi $I_n + 2M \geq 0$ (toutes ces opérations se font terme à terme). (1 pt) Ainsi, M est productive (d'après la CNS de la question précédente) (1 pt)

Problème 2 - Autour de la dérivation de séries

A - Séries géométriques dérivées

L'objectif de cette section est d'établir pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$$

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. On sait :

$$\binom{k}{p} = \frac{k!}{p!(k-p)!} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-p+1)}{p!}$$

Or $k \sim k-1 \sim \dots \sim k-p+1$ donc

$$\binom{k}{p} \sim \frac{k \times k \times \dots \times k}{p!}$$

Il reste à vérifier qu'il y a bien p termes au dénominateur : $k - j$ pour $j \in [|0; p-1|]$ font bien p termes. Ainsi,

$$\binom{k}{p} \sim \frac{k^p}{p!}$$

(2 pt) *J'ai ici essayé de mettre une formulation claire à la lecture pour celles et ceux qui n'auraient pas compris comment ça marche, mais une formulation plus formelle que les «...» sera appréciée.*

2. C'est-à-dire : montrons que $\frac{\binom{k}{p}|x|^k}{\lambda^k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. D'après la question précédente (1 pt),

$$\frac{\binom{k}{p}|x|^k}{\lambda^k} \sim \frac{k^p}{p!}\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)^k$$

Or, $p!$ est une constante ici (1 pt), et $\frac{|x|}{\lambda} < 1$ donc par croissances comparées (1 pt) polynômes / suites géométriques, $\frac{k^p}{p!}\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. Ainsi :

$$\binom{k}{p}|x| = o(\lambda^k)$$

3. On sait que $0 \leq \left|\binom{k}{p}x^k\right| = \binom{k}{p}|x|^k = o(\lambda^k)$ avec $\lambda < 1$, donc d'après les théorèmes du cours, $\sum \left|\binom{k}{p}x^k\right|$ converge (1 pt) et donc $\sum \binom{k}{p}x^k$ converge absolument (1 pt)

4. On définit, pour $x \in]-1;1[$, $S_p(x) = \sum_{k=p}^{+\infty}\binom{k}{p}x^k$ **bien défini d'après la question précédente !**

   (a)

$$\begin{aligned}
S_0(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k}{0}x^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \\
&\boxed{= \frac{1}{1-x}} \\
S_1(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\binom{k}{1}x^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} kx^k \\
&= x\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} \\
&= x \times \frac{1}{(1-x)^2} \\
&= \boxed{\frac{x}{(1-x)^2}} \\
S_2(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty}\binom{k}{2}x^k \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k(k-1)}{2}x^k \\
&= \frac{x^2}{2}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} \\
&= \frac{x^2}{2} \times \frac{2}{(1-x)^3} \\
&= \boxed{\frac{x^2}{(1-x)^3}}
\end{aligned}$$

(6 pt) (2 points par série)

(b) Soit $x \in]-1;1[$.

$$\begin{aligned}
S_{p+1}(x) &= \sum_{k=p+1}^{+\infty} \binom{k}{p+1} x^k \\
&= \sum_{k=p+1}^{+\infty} \left(\binom{k-1}{p} + \binom{k-1}{p+1} \right) x^k \text{ par la formule de Pascal (1 pt)} \\
&= \sum_{k=p+1}^{+\infty} \binom{k-1}{p} x^k + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \binom{k-1}{p+1} x^k \\
&= \sum_{k=p+1}^{+\infty} \binom{k-1}{p} x^k + \sum_{k=p+2}^{+\infty} \binom{k-1}{p+1} x^k \text{ car } \binom{p}{p+1} = 0 \text{ (1 pt)} \\
&= \sum_{j=p}^{+\infty} \binom{j}{p} x^{j+1} + \sum_{j=p+1}^{+\infty} \binom{j}{p+1} x^{j+1} \text{en changeant d'indice (1 pt)} \\
&= xS_p(x) + xS_{p+1}(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, $S_{p+1}(x) = xS_p(x) + xS_{p+1}(x)$ donc $(1-x)S_{p+1}(x) = xS_p(x)$ (1 pt)

(c) Montrons le résultat attendu par récurrence. (1 pt)

— **Initialisation :** pour $p = 0$, $S_0(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{x^0}{(1-x)^{0+1}}$ (1 pt)

— **Hérédité :** soit $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in]-1;1[$, $\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k = S_p(x) = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$. Alors, pour tout $x \in]-1;1[$, $1-x \neq 0$ et donc :

$$S_{p+1}(x) = \frac{x}{1-x} S_p(x) = \frac{x}{1-x} \times \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}} = \frac{x^{p+1}}{(1-x)^{p+2}}$$

Ainsi, la récurrence est établie et pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]-1;1[$: $S_p(x) = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$ (2 pt)

5. Soit X une variable aléatoire vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2^n}$. Soit Y une variable aléatoire qui, sachant $X = n$, suit une loi binômiale de paramètres $(n, \frac{1}{2})$.

(a) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. En appliquant la formule des probas totbles au système complet d'événements associé à X (1 pt), pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}_{(X=n)}(Y = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \times \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{4^n}$$

(2 pt)

(b) Pour $k = 0$, on obtient $\mathbb{P}(Y = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}$ (1 pt). Pour les autres valeurs de k, d'après les

questions précédentes,

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{4^n} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{4^n} \text{ car pour } n < k, \binom{n}{k} = 0 \\
&= S_k\left(\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{(\frac{1}{4})^k}{(1-\frac{1}{4})^{k+1}} \\
&= \frac{1}{4^k} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} \\
&= \frac{4}{3^{k+1}}
\end{aligned}$$

(3 pt)

B - Généralisation : dérivation sous le signe somme (inspiré de ESSEC 2018)

Soit (a_n) une suite de réels et $R > 0$ telle que $a_n R^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

1. Soit $r \in]0; R[$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq |a_n| r^n = |a_n| R^n \left(\frac{r}{R}\right)^n$$

(1 pt) Or, par hypothèse, $|a_n| R^n = |a_n R^n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $|a_n| r^n = o\left(\left(\frac{r}{R}\right)^n\right)$ (1 pt) Puisque $\frac{r}{R} < 1$, $\sum \left(\frac{r}{R}\right)^n$ converge et donc $\sum |a_n| r^n$ converge. (1 pt)

2. De la même manière, posons $r \in]0; R[$ et $r' = \frac{r+R}{2}$ (1 pt). Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors,

$$n^k |a_n| r^n = |a_n| (r')^n n^k \left(\frac{r}{r'}\right)^n$$

Alors, $n^k \left(\frac{r}{r'}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée (1 pt) donc $n^k |a_n| r^n = o\left(|a_n| (r')^n\right)$ (1 pt). D'après la question précédente, puisque $r' \in]0; R[$, $\sum |a_n| (r')^n$ converge (1 pt) et donc $\sum n^k |a_n| r^n$ converge (1 pt)

3. Pour tout $x \in]-R; R[$, $|x| \in]0; R[$ donc $\sum |a_n| |x|^n$ converge d'après la question 1 (1 pt) et donc $\sum a_n x^n$ converge absolument (1 pt) donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est bien défini. (1 pt)

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $f_n : x \mapsto x^n$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ (1 pt) avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = nx^{n-1}$. (1 pt) Si $x \in [-r; r]$, $|f_n'(x)| = n|x|^{n-1} \leq nr^{n-1}$ (1 pt). D'après l'inégalité des accroissements finis (1 pt), pour x et $x + h$ dans $[-r; r]$,

$$|f_n(x+h) - f_n(x)| \leq nr^{n-1} |(x+h) - x|$$

i.e.

$$|(x+h)^n - x^n| \leq nr^{n-1} |h|$$

(1 pt)

5. Avec les mêmes notations qu'à la question précédente,

$$\begin{aligned}
|f_a(x+h) - f_a(x)| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x+h)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right| \\
&= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n((x+h)^n - x^n)\right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n||(x+h)^n - x^n| \text{ par inégalité triangulaire (1 pt)} \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| n r^{n-1} |h| \text{ d'après la question précédente (1 pt) et parce que cette dernière somme converge (1 p} \\
&\leq \frac{1}{r}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| n r^n\right)|h| \text{ par linéarité (1 pt)}
\end{aligned}$$

6. On a donc montré que pour tout $x \in [-r; r]$, pour tout h tel que $x + h \in [-r; r]$,

$$|f_a(x+h) - f_a(x)| \leq \frac{1}{r}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| n r^n\right)|h| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Par théorème des gendarmes (1 pt), on a donc $f_a(x+h) \xrightarrow[h\to 0]{} f_a(x)$ (1 pt) donc f_a est continue en x, et ce pour tout $x \in [-r; r]$. Ainsi, f_a est continue en tout point de $[-r; r]$ pour tout $r \in]0; R[$ donc en tout point de $]-R; R[= \bigcup_{r=0}^{R} [-r; r]$ (1 pt)

7. **Caractère $\mathcal{C}^1$.** On considère ici un réel $r \in]0; R[$ et $x \in [-r; r]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et sous réserve d'existence : $g_a : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

   (a) D'après la question 2 avec $k = 1$, g_a est bien définie (1 pt) et donc en appliquant la question précédente à la suite (na_n), g_a est continue (1 pt) sur $]-R; R[$

   (b) D'après le théorème fondamental de l'analyse (1 pt), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [-r; r]$,

   $$\int_0^x S_n'(t)dt = [S_n(t)]_0^x = S_n(x) - S_n(0)$$

   (1 pt) Or, $S_n(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k 0^k = a_0$ (1 pt) car $0^k = 0$ sauf pour $k = 0$ avec $0^0 = 1$. On a ainsi l'égalité demandée.

   (c) Soit $n \in N^*$.

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^x (g_a(t) - S_n'(t))dt\right| &= \left|\int_0^x \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k t^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1}\right)dt\right| \text{ par linéarité de la dérivée (1 pt)} \\
&= \left|\int_0^x \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} k a_k t^{k-1}\right)dt\right| \\
&\leq \int_0^x \sum_{k=n+1}^{+\infty} |k a_k t^{k-1}| dt \text{ par inégalité triangulaire pour l'intégrale et la somme (1 pt)} \\
&\leq \int_0^x \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k| r^{k-1} dt \text{ en majorant } t \text{ par } r\text{, indépendant de } t \text{ (1 pt)} \\
&\leq x \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k| r^{k-1} \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k| r^k \text{ car } x \leq r \text{ (1 pt)}
\end{aligned}$$

(d) Puisque $\sum k|a_k|r^k$ converge, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k|r^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (1 pt). Par théorème des gendarmes (1 pt),

$$\int_0^x S_n'(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^x g_a(t)dt$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^x S_n'(t)dt = \int_0^x \sum_{k=1}^n a_k k t^{k-1} dt = \sum_{k=1}^n a_k \int_0^x k t^{k-1} dt = \sum_{k=1}^n a_k x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} f_a(x) - a_0$$

(2 pt) Par unicité de la limite (1 pt),

$$\int_0^x g_a(t)dt = f_a(x) - a_0$$

En ajoutant a_0 de chaque côté de l'égalité, on obtient l'égalité désirée.

(e) g_a est une fonction continue, donc d'après le théorème fondamental de l'analyse (1 pt), elle admet une primitive G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R;R[$ (1 pt) et $\int_0^x g_a(t)dt = G(x) - G(0) = f_a(x) - a_0$. Ainsi, $f_a(x) = a_0 + G(x) - G(0)$ donc f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout x, $f_a'(x) = G'(x) = g_a(x)$ (1 pt)

C - Fonction génératrice (inspiré de ESSEC 2018 et CentraleSupélec 2024 TSI)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On posera pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \mathbb{P}(X = n)$ et $G_X : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, autrement dit $G_X = f_a$.

1. C'est une conséquence directe du théorème de transfert. (1 pt)
2. Supposons que X suit une loi uniforme sur $[|1;N|]$. Alors pour tout $n \in [|1;N|]$, $a_n = \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{N}$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ (puisque c'est une somme finie donc toujours convergente!) (1 pt)

$$G_X(x) = \sum_{n=1}^N \frac{x^n}{N} = \frac{1}{N} \times \frac{x - x^{N+1}}{1-x}$$

3. Dans ce cas, pour tout $k \in [|0;N|]$, $a_n = \mathbb{P}(X = n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$ (1 pt) donc :

$$G_X(x) = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} x^n = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} (px)^n (1-p)^{N-n} = (px + 1 - p)^N$$

(2 pt)

4. Dans les questions précédentes, les sommes étaient toujours finies. Maintenant, on se demande si G_X est toujours définie en règle générale. Puisque X est une variable aléatoire, $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$ donc $\sum a_n$ converge et en particulier $a_n \to 0$ (2 pt)
5. On applique le résultat de la partie précédente ! On a montré que $G_X' = f_a' = g_a$ donc pour tout $x \in]-R;R[$, $G_X'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ (1 pt)
6. Si $R > 1$, alors G_X est définie et dérivable en 1 et avec la formule de la question précédente appliquée à $x = 1$:

$$G_X'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n 1^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n = E(X)$$

(2 pt)

7. **Premier exemple** Supposons que X suit une loi de Poisson de paramètre 1.

(a) Il suffit, d'après les résultats de la partie 2, de justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a_n x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or, dans le cas d'une loi de Poisson de paramètre 1, $a_n = e^{-1}\frac{1}{n!}$ et par croissance comparée $\frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (2 pt)

(b) On calcule pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G_X(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{e^{-1}}{x}^n n! \text{(1 pt)} \\ &= e^{-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!} \\ &= e^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} \\ &= e^{x-1} \text{(1 pt)} \end{aligned}$$

Donc $G'_X(x) = e^{x-1}$ et $G'_X(1) = 1$ On retrouve $E(X) = 1$

8. **Deuxième exemple** Soit $p \in]0;1[$ et $q = 1-p$. On suppose que $X+1$ suit une loi géométrique de paramètre p.

(a) Montrons que pour tout $x < \frac{1}{q}$, $a_n x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On sait : $a_n = pq^n$ donc $a_n x^n = pq^n x^n = p(qx)^n$ avec $qx < 1$. Ainsi, $(qx)^n \to 0$ et donc $a_n x^n \to 0$. (1 pt)

(b) Ainsi, pour tout $x \in]-\frac{1}{q};\frac{1}{q}[$, $G_X(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} pq^n x^n = p\sum_{n=0}^{+\infty}(qx)^n = \frac{p}{1-qx}$ (2 pt) On en déduit, $G'_X(x) = \frac{pq}{(1-qx)^2}$ et $G'_X(1) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$ et on retrouve l'espérance de X

9. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que G_X et G_Y sont définies sur $]-R;R[$. On cherche à montrer : $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \mathbb{P}(X=k)$ et $b_k = \mathbb{P}(Y=k)$

(a) Utilisons la formule des probas totales pour le système complet d'événements associé à X (1 pt) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}_{X=k}(X+Y=n) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}_{X=k}(Y=n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k) \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k) \text{ car } \mathbb{P}(Y=n-k)=0 \text{ si } n<k \end{aligned}$$

(3 pt)

(b) Comme l'indique l'énoncé, on manipulera les sommes infinies comme des sommes finies dans le cadre de cette question.

$$\begin{aligned} G_X(x)G_Y(x) &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j x^j\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_k b_j x^{k+j} \text{(1 pt)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} a_k b_{n-k} x^n \text{ en posant } n = k+j \text{ (1 pt)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n \text{ en inversant les deux sommes (1 pt)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n \text{ puisque } x^n \text{ ne dépend pas de } k \end{aligned}$$

(1 pt)

(c) On a donc démontré que pour tout $x \in]-R; R[$:

$$G_X(x)G_Y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X+Y=n)x^n = G_{X+Y}(x)$$

(2 pt)