Feuilles d'exercices n°21

Exercice 1. Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

1. $S_1 = ((1,1,0),(2,1,2))$
   Non (2 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ donc pas générateur)
2. $S_2 = ((1,1,0),(2,1,2),(1,0,a))$ avec a réel (on discutera suivant la valeur de a)
   Posons le système : $\lambda(1,1,0) + \mu(2,1,2) + \nu(1,0,a) = 0$, c'est-à-dire :
   $$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda & + & 2\mu & + & \nu & = & 0 \\ \lambda & + & \mu & & & = & 0 \\ & & 2\mu & + & a\nu & = & 0 \end{array}\right.$$
   En effectuant l'opération : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:
   $$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda & + & 2\mu & + & \nu & = & 0 \\ & - & \mu & - & \nu & = & 0 \\ & & 2\mu & + & a\nu & = & 0 \end{array}\right.$$
   Puis : $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$:
   $$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda & + & 2\mu & + & \nu & = & 0 \\ & - & \mu & - & \nu & = & 0 \\ & & & & (a-2)\nu & = & 0 \end{array}\right.$$
   Ce système a une unique solution si et seulement si $a \neq 2$, donc la famille est libre si $a \neq 2$. La famille $((1,1,0),(2,1,2),(1,0,2))$ est liée.
3. $S_3 = ((1,0,0),(a,b,0),(c,d,e))$ avec a,b,c,d,e réels (on discutera suivant leur valeur)
   Idem au départ, avec le système :
   $$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda & + & a\mu & + & c\nu & = & 0 \\ & & b\mu & + & d\nu & = & 0 \\ & & & & e\nu & = & 0 \end{array}\right.$$
   Si $e = 0$, la dernière ligne est tautologique et le système admet une infinité de solutions. Sinon, $\nu = 0$ et on obtient :
   $$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda & + & a\mu & & & = & 0 \\ & & b\mu & & & = & 0 \\ & & & & \nu & = & 0 \end{array}\right.$$
   Alors, de la même façon, le système admet une infinité de solutions si $b = 0$, et sinon $\mu = 0$ et alors $\lambda = 0$. On en déduit :
   $$\text{la famille est libre si et seulement si } b \neq 0 \text{ et } e \neq 0$$
4. $S_4 = ((1,1,3),(3,4,5),(2,5,7),(8,1,9))$
   Non (4 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ donc pas libre)

Exercice 3. Montrer que les vecteurs $u_1 = (0,1,1), u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver dans cette base les coordonnées du vecteur $u = (1,1,1)$.
Pour la première étape, il suffit de vérifier que la famille est libre puisqu'il y a 3 vecteurs en dimension 3.
Pour la deuxième étape, on observe :
$$u_1 + u_2 + u_3 = (2,2,2) = 2u$$
d'où : $u = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3$. Les coordonnées de u dans la base (u_1,u_2,u_3) sont : $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}^3$.

1. Les familles suivantes sont-elles libres ? Si oui, les compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$? Si oui, en extraire une base, si non, exhiber un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui ne s'exprime pas en fonction des vecteurs de la famille

Dans les exemples suivants, nous ne donnerons pas de méthodes de résolutions ou de calculs de résolutions de systèmes linéaires, seulement des éléments de réponse pour vérifier vos solutions.

— $\mathcal{F}_1 = ((2,4,3),(1,5,7))$
Les deux vecteurs forment une famille libre (deux vecteurs non colinéaires) et non génératrice de $\mathbb{R}^3$ (qui est de dimension 3). On peut compléter la famille en une base de $\mathbb{R}^3$ par exemple en ajoutant le vecteur $(0,0,1)$: vérifier que les 3 vecteurs ainsi obtenus sont bien libres.

— $\mathcal{F}_2 = ((1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,6))$
On sait que 4 vecteurs en dimension 3 forment toujours une famille liée. On trouve en fait que la plus grande sous-famille libre est composée de deux vecteurs ($\mathcal{F}_2$ est de rang 2) : $((1,2,3),(2,3,4))$. Ceci permet de justifier que $\mathcal{F}_2$ n'engendre pas $\mathbb{R}^3$: $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y + z = 0\}$
En particulier, $(1,0,0)$ n'est pas dans l'espace engendré par $\mathcal{F}_2$

— $\mathcal{F}_3 = ((9,-3,7),(1,8,8),(5,-5,1))$
La famille est liée : $(5,-5,1) = \frac{3}{5}(9,-3,7) - \frac{2}{5}(1,8,8)$. Elle n'est donc ni libre ni génératrice de $\mathbb{R}^3$. En particulier, $(1,0,0)$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}_3$

— $\mathcal{F}_4 = ((0,1,2)(1,2,0),(2,0,1))$
Cette famille est libre, donc génératrice de $\mathbb{R}^3$ (trois vecteurs en dimension 3)

— $\mathcal{F}_5 = ((1,1,0),(2,0,1),(3,1,1),(1,0,2))$
On peut déjà être certain·es que la famille est liée (quatre vecteurs en dimension 3). En résolvant un système, ou en remarquant que le troisième vecteur est la somme des deux premiers, on montre aisément qu'une sous famille libre maximale est $((1,1,0),(2,0,1),(1,0,2))$. $\mathcal{F}_5$ est donc génératrice de $\mathbb{R}^3$

Exercice 7. Soit F le sous espace vectoriel de $E = \mathcal{C}^0([0;2])$ des fonctions affines sur $[0;1]$ et affines sur $[1;2]$. Montrer que F est effectivement un sous-ev de E et en trouver une base.
On vérifie aisément qu'une combinaison linéaire de fonctions affine est affine. Les fonctions de f sont de la forme $x \mapsto \begin{cases} ax+b & \text{si } x \leq 1 \\ cx+d & \text{sinon} \end{cases}$ avec $a+b = c+d$ par continuité, i.e. $d = a+b-c$. Une base de F est la famille composée des fonctions :

—
$$f_1 : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
$(a = 1, b = 0, c = 0)$

—
$$f_2 : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
$(a = 0, b = 1, c = 0)$. C'est la fonction constante égale à 1.

—
$$f_3 : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0;1] \\ x-1 & \text{sinon} \end{cases}$$
$(a = 0, b = 0, c = 1)$

Exercice 8. Soit $E = \mathbb{R}^4$. On considère $F = \{(x,y,z,t) \in E \mid 2x + y = 0 \text{ et } t = -x + 3z\}$ et $G = \{(x,y,z,t) \in E \mid x + 2y + 3z + t = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des espaces vectoriels.
   On montre que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Trois méthodes : stabilité par combinaison linéaire, noyau d'une application linéaire ou se référer directement à la question suivante.
2. Donner une base de F, une base de G, déterminer la dimension de ces deux espaces.
   $F = \{(x,-2x,z,-x+3z) | (x,z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,-2,0,-1),(0,0,1,3))$. Les deux vecteurs sont libres car non colinéaires donc forment une base de F : $\dim(F) = 2$.
   $G = \{(x,y,z,-x-2y-3z) | (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}((1,0,0,-1),(0,1,0,-2),(0,0,1,-3))$. Les trois vecteurs forment une famille libre (poser le système ?) donc forment une base de G : $\dim(G) = 3$
3. Déterminer $F \cap G$ et en donner une base. Montrer que $F \cap G$ est une droite vectorielle.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & & & & & = & 0 \\ x & & & - & 3z & + & t & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & & y & + & 6z & - & 2t & = & 0 \\ x & & & - & 3z & + & t & = & 0 \\ & & 2y & + & 6z & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & - & 3z & + & t & = & 0 \\ & & y & + & 6z & - & 2t & = & 0 \\ & & & - & 6z & + & 4t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & & & = & t \\ & & y & = & -2t \\ & & z & = & \frac{2}{3}t \end{array}\right.$$

On en déduit : $F \cap G = \{(t, -2t, \frac{2}{3}t, t) | t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, -2, \frac{2}{3}; 1)) = \mathrm{Vect}((3, -6, 2, 3))$

Exercice 14. 1. Montrer que $(1, (X+1), ..., (X+1)^n)$ est une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.
La famille est libre car de degrés étagés. Par ailleurs, elle contient $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[x]$ qui est de dimension $n+1$ donc c'est une base de E.

2. Montrer que l'ensemble F des polynômes de E qui s'annulent en -1 est un sous espace-vectoriel de E.
Le polynôme nul s'annule en -1. Si P, Q s'annulent en -1 et a, b sont des réels, alors $(aP+bQ)(-1) = aP(-1) + bQ(-1) = a \times 0 + b \times 0 = 0$. Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E.

3. Déterminer un supplémentaire de F dans E.
On constate que $F = \mathrm{Vect}(x+1, (x+1)^2, \ldots, (x+1)^n)$ et donc un supplémentaire de F dans E est $G = \mathrm{Vect}(1)$

Exercice 16. Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, comparer les s.e.v.

1. $F = \mathrm{Vect}(1, \sin, \cos, \sin(2\square), \cos(2\square))$
2. $G = \mathrm{Vect}(1, \sin, \cos, \cos^2, \sin^2, \cos(\square).\sin(\square))$

C'est-à-dire : a-t-on $F = G$? $F \subset G$? $G \subset F$?
On peut se contenter de raisonner sur les éléments qui engendrent les deux familles.

— $1 \in F \cap G$
— $\sin \in F \cap G$
— $\cos \in F \cap G$
— $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ donc $\sin(2\square) = 2\cos(\square)\sin(\square) \in G$
— $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ donc $\cos(2\square) = \cos^2(\square) - \sin^2(\square) \in G$
— $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$ donc $\cos^2(\square) = \frac{1}{2}\cos(2\square) + \frac{1}{2} \times 1 \in F$
— $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ donc $\sin^2(\square) = 1 - \cos^2(\square) \in F$ puisque $1 \in F$ et $\cos^2(\square) \in F$
— $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x)\sin(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ donc $2\cos(\square)\sin(\square) = \frac{1}{2}\sin(2\square) \in F$

On en conclut que $F = G$: les familles génératrices de chacun des ensembles sont inclues dans l'autre ensemble.

Exercice 17. Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, comparer les s.e.v.

1. $F = \mathrm{Vect}(1, \sin, \cos, \sin(2\square), \cos(2\square))$
2. $G = \mathrm{Vect}(1, \sin, \cos, \cos^2, \sin^2, \cos(\square).\sin(\square))$

C'est-à-dire : a-t-on $F = G$? $F \subset G$? $G \subset F$?

Exercice 18 (Isomorphismes et dimensions : en prévision du chapitre prochain)**.** Soit E un espace vectoriel dont $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base. On suppose que F est un e.v. et $\Phi : E \to F$ un **isomorphisme**. On note $\mathcal{B}' = (\Phi(e_1), \ldots, \Phi(e_n))$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de F.

Indication : on utilisera la caractérisation des bases par l'unicité de l'écriture de $x \in E$ comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$ Remarque : cette propriété ressemble beaucoup, y compris dans sa démonstration, au lemme du chapitre 22 étudié en classe.

Soit $y \in F$. Montrons qu'il existe une unique écriture de y comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}'$.

— Existence : Puisque Φ est un isomorphisme (en particulier est surjective), il existe $x \in E$ tel que $y = \Phi(x)$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

D'où :

$$y = \Phi(x) = \Phi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 \Phi(e_n) + \ldots + x_n \Phi(e_n)$$

par linéarité. On a ainsi une écriture de y comme combinaison linéaire de $\mathcal{B}'$.

— Unicité : Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(x'_1, \ldots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$y = x_1 \Phi(e_1) + \ldots + x_n \Phi(e_n) \text{ et } y = x'_1 \Phi(e_1) + \ldots, + x'_n \Phi(e_n)$$

Alors :

$$\begin{aligned} x_1 \Phi(e_1) + \ldots + x_n \Phi(e_n) &= x'_1 \Phi(e_1) + \ldots + x'_n \Phi(e_n) \\ \Phi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) &= \Phi(x'_1 e_1 + \ldots + x'_n e_n) \text{ par linéarité} \\ x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n &= x'_1 e_1 + \ldots + x'_n e_n \text{ car } \Phi \text{ injective} \\ x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, \ldots, x_n = x'_n &\text{ car } \mathcal{B} \text{ est libre} \end{aligned}$$

y s'écrit alors de manière unique dans $\mathcal{B}'$. Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, $\mathcal{B}'$ est une base de F.

Exercice 19 (Dimension infinie)**.** On rappelle qu'un espace est **de dimension infinie** si il n'admet pas de famille génératrice (finie). Montrer qu'il y a équivalence entre :

1. E est de dimension infinie
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une famille libre de n vecteurs de E.

Raisonnons par double implication.

— $2 \Rightarrow 1$ est la contraposée d'une propriété du cours : si E est de dimension finie n, il n'existe pas de famille libre de $n+1$ vecteurs.

— $1 \Rightarrow 2$. Montrons par contraposée que si il existe un plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que toute famille de $n+1$ éléments soit liée, alors E est de dimension finie égale à n.
Soit n ce plus petit entier. Si $n = 0$, il n'existe aucune famille de 1 vecteur libre, c'est-à-dire que $E = \{0\}$ qui est de dimension 0. Sinon : par hypothèse, puisque $n-1$ ne vérifie pas la même condition, il existe une famille de n vecteurs qui est libre. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ les vecteurs de cette famille.
Soit $x \in E$. Puisque $(e_1, \ldots, e_n, x)$ contient $n+1$ vecteurs, la famille est nécessairement liée. Puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, c'est que x s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de $(e_1, \ldots, e_n)$. On on conclut que $(e_1, \ldots, e_n)$ engendre E. Ainsi, $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, qui est de dimension n.

Un cas particulier : puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ est une famille de polynômes de degrés étagés donc libre, $\mathbb{R}[x]$ est de dimension infinie.