Devoir Maison n°15 - Séries de Riemann

On sait que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Voici quelques problèmes qui permettent d'étudier plus en détail certaines de ces séries, en particulier :

— Quand $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, quelle est sa limite ? On étudiera le cas $\alpha = 2$

— Quand $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge, peut-on trouver un équivalent ? On étudiera le cas de la série harmonique.

Sur les traces de Gamma

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)} dx$$

1. Calculer la valeur de u_1
   $u_1 = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = 1 - [\ln(x+1)]_0^1 = 1 - \ln(2)$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction f_n sur $[0;1]$ par :

$$\forall x \in [0;1], f_n(x) = \frac{x}{x+n}$$

   Dresser le tableau de variations de f_n
   f_n est dérivable sur $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$:

$$f_n'(x) = \frac{x+n-x}{(x+n)^2} = \frac{n}{(x+n)^2} > 0$$

   Ainsi, f_n est strictement croissante et $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = \frac{1}{n+1}$ (mettre tout ça dans un tableau)
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$
   D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0;1]$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n+1}$ et en intégrant :

$$0 \leq \frac{1}{n} \int_0^1 f_n(x) dx \leq \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{1}{n+1} dx$$

   i.e. : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$

   (b) En déduire la convergence de la série $\sum u_n$.
   D'après le critère de Riemann, $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente donc $\sum u_n$ converge par comparaison pour les séries à termes positifs.

   On note désormais $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

   (a) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leq \gamma$
   Puisque (u_n) est une suite à terme positifs, (S_n) est croissante donc toujours inférieure à sa limite, d'où l'inégalité.

   (b) Déterminer les deux réels a, b tels que pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{x+k}$$

   En mettant au même dénominateur :

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{x+k} = \frac{bk + a(x+k)}{k(x+k)} = \frac{ax + (a+b)k}{k(x+k)}$$

   Ainsi, $\frac{a}{k} + \frac{b}{x+k} = \frac{x}{k(x+k)}$ si et seulement si : $\boxed{a = 1}$ et $(a+b)k = 0$ i.e. $\boxed{b = -1}$.

   (c) Établir alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$$

   Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant l'égalité précédente :

$$u_k = \int_0^1 \frac{x}{k(x+k)} dx = \int_0^1 \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} dx = \frac{1}{k} - [\ln(x+k)]_0^1 = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$$

(d) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1)$

Sommons l'égalité précédente pour $k \in [|1; n|]$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \text{ par télescopage}$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$

(a) Justifier que (T_n) est convergente et préciser sa limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \ln(n+1) - \ln(n) = S_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ Puisque (S_n) converge vers γ et que $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ tend vers 0, $T_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \gamma$

(b) En déduire en particulier : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$

On déduit de la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1) = \ln(n) + o(\ln(n)) \sim \ln(n)$$

(c) Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

Cette inégalité découle directement de l'inégalité des accroissements finis, appliquée à la fonction ln sur l'intervalle $[n; n+1]$

(d) En déduire que (T_n) est une suite décroissante.

Soit $n \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \\ &\leq 0 \text{ d'après la question précédente} \end{aligned}$$

Ainsi, (T_n) est décroissante.

6. Donner finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de γ à l'aide de T_n et S_n

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n \leq \gamma \leq T_n$$

puisque $T_n \to \gamma$ en décroissant.

7. On considère la fonction Python ci-dessous :

```
import numpy as np
def gamma(p):
    n = 1
    while np.log(1+1/n) > p:
        n = n+1
    L = [1/k for k in range(1,n+1)]
    S = sum(L) - np.log(n+1)
    T = sum(L) - np.log(n)
    return S,T
```

L'exécution de la commande `gamma(10**(-3))` renvoie : $(0.5767160812351229, 0.5777155815682065)$

Interpréter ce résultat.

On en déduit que γ est compris entre les deux valeurs affichées, et en particulier $\gamma \simeq 0,577$

La conclusion de tout ceci est que la série harmonique est équivalente à $\ln(n)$ *mais plus précisément :*

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

avec une valeur approchée de γ *et un algorithme pour trouver des valeurs approchées plus précises.*

Une valeur étonnante (ESSEC 2001 ECS)

Dans ce problème, on étudie la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier la limite de la suite (S_n). On considère pour tout entier $p \geq 0$ les deux intégrales :

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t)\mathrm{d}t \quad ; \quad J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2p}(t)\mathrm{d}t$$

1. **Introduction :** calculer la valeur de I_0 et de J_0.

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$$

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3$$

2. **Convergence de la suite** (J_p/I_p)

(a) Pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, établir l'inégalité :

$$t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t)$$

On pourra utiliser deux dérivations

Posons la fonction $f : t \mapsto t - \frac{\pi}{2}\sin(t)$. f est deux fois dérivable avec pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$:

$$f'(t) = 1 - \frac{\pi}{2}\cos(t)$$

$$f''(t) = \frac{\pi}{2}\sin(t)$$

Puisque la fonction sin est positive sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, $f'' \geq 0$ et donc f' est croissante. Par ailleurs, $f'(0) = 1 - \frac{\pi}{2} \neq 0$ et $f'(1) = 1 \geq 0$. Par théorème de la bijection, il existe un unique $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ tel que $f'(\alpha) = 0$ et on obtient le tableau de variations suivant :

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de $f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

On lit dans ce tableau que f est une fonction négative, d'où l'inégalité recherchée.

(b) En déduire pour tout $p \geq 0$,

$$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}(I_p - I_{p+1})$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. J_p est clairement positive et :

$$J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2p}(t)dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\sin(t)\right)^2 \cos^{2p}(t)dt \leq \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t))\cos^{2p}(t)dt = \frac{\pi^2}{4}(I_p - I_{p+1})$$

(c) En intégrant par parties, établir une relation de récurrence entre I_{p+1} et I_p.

Indication : on pourra poser $u'(t) = \cos(t)$ *et* $v(t) = \cos^{2p+1}(t)$

En intégrant par parties, avec $u(t) = \sin(t)$ et $v(t) = \cos^{2p+1}(t)$,

$$I_{p+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p+1}(t)\cos(t)dt = \left[\sin(t)\cos^{2p+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2p+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^{2p}(t)dt = (2p+1)(I_p - I_{p+1})$$

On en déduit : $(2p+2)I_{p+1} = (2p+1)I_p$

(d) Déduire des résultats précédents :

$$\frac{J_p}{I_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$I_p - I_{p+1} = I_p - \frac{2p+1}{2p+2} I_p = \frac{1}{2p+2} I_p$$

D'après la question b, $J_p \leq \frac{\pi^2}{4} \times \frac{1}{2p+2} I_p$ d'où $\frac{J_p}{I_p} = \frac{\pi^2}{4(2p+2)}$ et par théorème des gendarmes, $\frac{J_p}{I_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

3. **Convergence et limite de la suite** (S_n)

(a) En intégrant deux fois par parties, montrer que pour tout $p \geq 1$,

$$I_p = p\left((2p-1)J_{p-1} - 2pJ_p\right)$$

Soit $p \geq 1$. En intégrant par parties, avec $u(t) = t$ et $v(t) = \cos^{2p}(t)$:

$$\begin{aligned} I_p &= \left[t\cos^{2p}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \times 2p \times (-\sin t)\cos^{2p-1}(t)dt \\ &= 0 + p\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\sin(t)\cos^{2p-1}(t)dt \end{aligned}$$

De même en primitivant $2t$ et en dérivant $\sin(t)\cos^{2p-1}(t)$:

$$\begin{aligned} I_p &= p\left(\left[t^2\sin(t)\cos^{2p-1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \times (\sin(t)(2p-1)(-\sin(t))\cos^{2p-2}(t) + \cos(t)\cos^{2p-1}(t))dt\right) \\ &= p\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\left((2p-1)(1-\cos^2(t))\cos^{2p-2}(t) - \cos^{2p}(t)\right)dt \\ &= p((2p-1)J_{p-1} - 2pJ_p) \end{aligned}$$

(b) En déduire :

$$\forall p \geq 1, \frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}$$

Soit $p \geq 1$. D'après la question précédente, en divisant par I_p :

$$p\left((2p-1)\frac{J_{p-1}}{I_p} - 2p\frac{J_p}{I_p}\right) = 1$$

En injectant la relation de récurrence de la suite I_p de la question $2.c$,

$$p\left((2p-1) \times \frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} \times \frac{2p}{2p-1} - 2p \times \frac{J_p}{I_p}\right) = 1$$

En divisant par $2p^2$ (car $p \geq 1$), on obtient en effet :

$$\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}$$

(c) En utilisant les valeurs de J_0 et I_0 et la relation de la question précédente, déterminer la limite ℓ de la suite (S_n)
On utilise alors un télescopage : soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} \\ &= 2 \times \sum_{p=1}^{n} \frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} \\ &= 2 \times \left(\frac{J_0}{I_0} - \frac{J_n}{I_n}\right) \end{aligned}$$

Puisque d'après la question 2.d, $\frac{J_n}{I_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\frac{J_0}{I_0} = 2 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \times \frac{2}{\pi} = \frac{\pi^2}{6}$

(d) Écrire un programme en Python qui demande à l'utilisateur un entier n et affiche le premier entier m tel que

$$|S_m - \ell| < 10^{-n}$$

```
from math import pi
n = int(input("degre de precision ?")) # ou n'importe quelle phrase
seuil = 10**(-n)
l = pi**2/6
m = 0
s = 0
while abs(s - l) >= seuil:
    m += 1
    s += (1/m**2)
print(m)
```