Chapitre 22 : Applications linéaires en dimension finie

Algèbre 6

Cadre : on étudie des applications linéaires $u : E \to F$ où E et F sont des espaces vectoriels **de dimension finie**
Rappel : ça signifie que pour tous réels λ, μ et pour tous $x, y \in E$, $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$ et en généralisant :

$$\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \forall(x_1, \ldots, x_n) \in E^n, u\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(x_k)$$

En prenant E, F de dimensions finies, on exclut certains exemples du chapitre 16 comme : la dérivation des fonctions $\mathscr{C}^1$, l'intégration sur $[0;1]$, le polynôme dérivé ou la dérivée discrète, la sommation de séries convergentes, etc.

I. Rang d'une application linéaire

1. Définition

Définition 1. Si $u : E \to F$ est une application linéaire, on appelle **rang** de u la dimension de l'image de u :

$$rg(u) = \dim(\text{Im } u)$$

Propriété 2. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et que $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ est un vecteur de E, alors :

$$u(x) = x_1 u(e_1) + \ldots + x_n u(e_n)$$

Ainsi, l'image des vecteurs d'une base **détermine entièrement** u

Propriété 3. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ engendre E alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ engendre $\text{Im}u$, ie $\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$
On en déduit :

$$\dim(\text{Im}u) \leqslant \dim(E)$$

Comme on a aussi $\text{Im}u \subset F$, $rg(u) \leqslant \min(\dim E, \dim F)$

Démonstration. C'est une reformulation de la propriété précédente.

Remarque. Ainsi, entre l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de u, on ne peut que «perdre» des dimensions. On va même préciser comment (combien).

2. La formule du rang

♡ **Propriété 4** (Formule du rang)**.** Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Alors :

$$\dim E = \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u))$$

Démonstration. En faisant intervenir un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ et le :

Lemme : si u est injective, alors l'image par u d'une famille libre de E est libre dans F

Exemples.

1. On considère l'application $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ définie par $f(P) = P'$. Déterminer une base du noyau de f et sa dimension. f est-elle injective ? Donner le rang de f. f est-elle surjective ?
2. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2z)$. Déterminer une base du noyau de f et sa dimension. f est-elle injective ? Donner le rang de f. f est-elle surjective ?

3. Caractérisation des isomorphismes

Propriété 5. Il y a équivalence entre :

1. u est bijective de E dans F
2. L'image de toute base de E par u est une base de F
3. Il existe une base de E dont l'image par u est une base de F

Propriété 6. Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et que $\dim(E) = \dim(F)$, il y a **équivalence** entre :

1. u est bijective de E dans F
2. u est injective
3. u est surjective

Remarque. On pourra donc montrer que u est un endomorphisme en montrant, par exemple, $\dim(E) = \dim(F)$ **et** $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$

Exemples.
1. Montrer que $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x - y, 2y + x) \in \mathbb{R}^2$ est un **automorphisme** de $\mathbb{R}^2$.
2. ♣ **Contre-exemple en dimension infinie :** Dans $\mathbb{R}[x]$, on définit une application linéaire u en posant pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, $u(P) = xP$. Montrer que u est injective mais pas bijective.

Définition 7. On dit que deux espaces vectoriels E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme $u : E \to F$

Étymologie : «iso» + «morphe» = même forme
Nos deux espaces se correspondent donc point à point : ils peuvent être « transformés » l'un dans l'autre : ils sont isomorphes (H. Poincaré, 1905)

Propriété 8 (Caractérisation). E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$

Démonstration.

♡ *Remarque.* En particulier : tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$!
Par rapport à l'étymologie : tous les plans ont la «même forme», toutes les droites aussi, etc.

4. Hyperplans

Définition 9 (Hyperplan). On dit que H est un hyperplan E si c'est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$, i.e. si H est supplémentaire d'une droite.

Propriété 10 (Caractérisation). Il y a équivalence entre

1. H est un hyperplan de E
2. Il existe une forme linéaire $u : E \to \mathbb{R}$ non nulle telle que $\mathrm{Ker}(u) = H$

Démonstration.

Remarque. Il y a alors **plusieurs** formes linéaires ayant H comme noyau, proportionnelles entre elles. Deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles.

Exercice (Application aux systèmes linéaires à deux équations).

1. Soient H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E. Quelle est la dimension de $H_1 \cap H_2$? *On pourra utiliser la formule de Grassman.*
2. Soient l_1, l_2 deux formes linéaires non nulles **linéairement indépendantes**. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $F = \{x \in E | l_1(x) = l_2(x) = 0\}$?

II. Matrice d'une application linéaire dans des bases $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$

1. Matrice d'un vecteur dans une base

Exemple. On se place dans $\mathbb{R}^3$. On appelle $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}'$ la base $((1,0,0),(1,-1,0),(2,-3,1))$.

1. Montrer que $\mathscr{B}'$ est effectivement une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Exprimer les coordonnées de $(1,0,0),(2,-3,1),(-1,-1,-1)$ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$

Définition 11. Soit $x \in E$ et $\mathscr{B}$ une base de E. On note $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. On appelle **matrice colonne des coordonnées de** x la matrice $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n;1}(\mathbb{R})$.

On note $[x]_{\mathscr{B}}$ cette matrice, ou $X_{\mathscr{B}}$ pour alléger la notation.

Propriété 12. On appelle **matrice de passage** de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$ la matrice $P_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}$ dont les coefficients (en colonne) sont les vecteurs de $\mathscr{B}'$ exprimés dans la base $\mathscr{B}$. On a alors pour tout vecteur $x \in E$:

$$X_{\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}'\mathscr{B}} X_{\mathscr{B}}$$

Propriété 13. Pour toutes bases $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$, $P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}^{-1}$

Démonstration.

Exemple. Dans l'exemple précédent, $P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathscr{B}'\mathscr{B}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

2. Premiers pas

Exemple. On considère $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+3y, x+y-2z) \end{array}$

1. Préciser les images des trois vecteurs de la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$
2. Si $x = 2e_1 - e_3$, que dire de $f(x)$?
3. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer : $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ x+y-2z \end{pmatrix}$

   Dans le monde des matrices colonnes dans la base $\mathscr{B}$, appliquer f c'est multiplier par A
4. Préciser les images des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ de l'exemple précédent.
5. On pose maintenant $\mathscr{C}' = ((-1,1),(0,1))$. Montrer que $\mathscr{C}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Exprimer les images de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{C}'$.

Définition 14. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
La **matrice de u relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ notée $Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u)$, ou** $[u]_{\mathscr{C},\mathscr{B}}$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont la k-ième colonne est la matrice colonne des coordonnées de $u(e_k)$ dans la base $\mathscr{C}$

Exemples.
- Si $E = F$, u est un **endomorphisme** et $Mat_{\mathscr{B}} := Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$ est une matrice **carrée de taille** n
- Si $F = \mathbb{R}$, u est une **forme linéaire** et $Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$ est une matrice **ligne**.

Exercice. Montrer que $F : P \mapsto xP'(x)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$ et préciser sa matrice dans la base canonique $(1, x, x^2, x^3)$

Exemple (Projecteur). Si u est un projecteur, $\mathscr{B}_1$ une base de $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathscr{B}_2$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$, alors la famille $\mathscr{B}$ obtenue par concaténation de $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ est une base de E et :

$$Mat_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Propriété 15. Si $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ sont des bases respectives de E et F, que X et Y sont les matrices colonnes des vecteurs x et y dans ces bases, et que $M = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f)$

$$y = f(x) \iff Y = MX$$

Remarque. On peut donc «lire» des informations sur l'image de f en regardant la matrice !

♡ *Exemple.* On considère $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{4;1}(\mathbb{R}))$ définie par $f : X \mapsto MX$.

On lit une base de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\mathrm{Ker}(f)$ «à l'œil nu»

3. Opérations

Exercice. On considère $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y) \end{array}$ et $v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-2x+y, x) \end{array}$.

1. Déterminer les matrices A et B représentant u et v dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer AB et BA.
3. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $(u \circ v)(x,y)$ et $(v \circ u)(x,y)$. En déduire la matrice de $u \circ v$ et la matrice de $v \circ u$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$

Propriété 16.

1. Si $u, v \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B}$ base de E, $\mathscr{B}'$ base de F, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(u + \lambda v) = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(u) + \lambda Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(v)$$

2. Si $u \in \mathscr{L}(E,F), v \in \mathscr{L}(F,G)$ et $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \mathscr{B}_3$ bases respectives de E, F, G :

$$Mat_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_1}(v \circ u) = Mat_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(v) \times Mat_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}(u)$$

Démonstration.

Remarque.

- Ceci justifie *a posteriori* la définition du produit matriciel. Par exemple : l'associativité $(AB)C = A(BC)$ découle de l'associativité $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$ qui est évidente.
- L'écriture est de type «relation de Chasles» entre les bases, ce qui justifie que les bases s'écrivent «à l'envers»

Propriété 17 (Corollaire - immédiat). Si $u \in \mathscr{L}(E,E)$ et que $\mathscr{B}$ est une base de E avec $M = Mat_{\mathscr{B}}(u)$, alors

$$Mat_{\mathscr{B}}(u^k) = M^k$$

Démonstration. Par récurrence.

4. Rang d'une matrice

Définition 18. On appelle **rang d'une matrice** $M \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ le rang de la famille des p vecteurs colonnes qui forment M.

Exemple. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est de rang 2, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 1, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 2

♡ *Définition* 19 (Application linéaire canoniquement associée à M). Si $M \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$, on appelle **application linéaire canoniquement associée à** M l'application $u_M : \mathscr{M}_{p;1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ définie pour tout X par $u_M(X) = MX$.

Propriété 20. Soit $M \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ et f l'application linéaire canoniquement associée à M. Alors, $rg(M) = rg(f)$

Démonstration.

Propriété 21 (Admise). Si u est une application linéaire de E dans F, que $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ sont des bases respectives de E et F et que $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(u)$,

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(u)$$

♡ *Propriété* 22 (Matrices inversibles). Soient E, F deux espaces vectoriels de même dimension, $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ des bases respectives de E et F, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $M = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)$. Il y a équivalence entre :

1. M inversible
2. f bijective (isomorphisme)
3. $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$

Dans ce cas :

$$M^{-1} = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f^{-1})$$

Démonstration.

Remarque. On en déduit qu'une matrice carrée M de taille n est inversible ssi elle est de rang n

Exemples. En reprenant les exemples A_1 et A_2 précédents, A_1 est inversible car de rang 2, A_3 n'est pas inversible car de rang $2 < 3$. De même pour les applications linéaires canoniquement associées.

Exemple (Une propriété admise du chapitre 10). Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB = I_n$. A est inversible d'inverse B.

Propriété 23 (Rang de la transposée - admis). Pour toute matrice M, $rg(M) = rg({}^tM)$

Notation. On note $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des **matrices inversibles** carrées de taille n.

III. Changement de base

1. Une étude de cas

Exercice. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et u canoniquement associée à M

1. Préciser $u\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$. Dans quelle base $\mathscr{B}_0$ de $\mathscr{M}_{3;1}(\mathbb{R})$ a-t-on $M = Mat_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_0}(u)$?
2. On considère $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer $u(X_1), u(X_2), u(X_3)$. Que remarque-t-on ?
3. Montrer que $\mathscr{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathscr{M}_{3;1}(\mathbb{R})$. Comment s'écrit u dans la base $\mathscr{B}$?
4. On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. Calculer $P^{-1}MP$.

2. Généralisation

♡ *Propriété* 24. Soit u une application linéaire de E dans F, $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ des bases de E, $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ des bases de F. Alors :

$$Mat_{\mathscr{C}',\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{C}'\mathscr{C}} Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}} P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$$

où $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$ est la **matrice de passage** de la base $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}'$.

Démonstration. ?

Exercice. Soit u l'application linéaire canoniquement associée à $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $\mathscr{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Déterminer la matrice $Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u)$

IV. Cas des endomorphismes : matrices carrées

1. Généralités

Tous les résultats des sections précédentes s'adaptent en particulier au cas $E = F$. Dans ce cas, on peut *choisir $\mathscr{C} = \mathscr{B}$: la même base pour l'ensemble de départ et d'arrivée.*

Notation. On notera $Mat_{\mathscr{B}}(u)$ pour $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}(u)}$. Cette matrice est **carrée**.

Propriété 25 (Rappel - binôme de Newton). Si $A, B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ **commutent**, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ commutent, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}$$

2. Polynômes d'endomorphismes

Définition 26 (Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice). Soit P un polynôme défini par : $P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$, une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit :

1. $P(M) = \sum_{k=0}^{p} a_k M^k$
2. $P(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k M^k$

Exemples.

♡ *Propriété* 27 (Opérations). Si λ, μ sont des réels, P, Q sont des polynômes, f un endomorphisme, M une matrice carrée, alors

1. $(\lambda P + \mu Q)(f) = \lambda P(f) + \mu Q(f)$
2. $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$
3. $(\lambda P + \mu Q)(M) = \lambda P(M) + \mu Q(M)$
4. $(PQ)(M) = P(M) \times Q(M)$

Si $M = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, alors $P(M) = Mat_{\mathcal{B}}(P(f))$.

Démonstration.

Exemple. Si $A = BQ + R$ sont des polynômes, alors $A(M) = B(M) \times Q(M) + R(M)$. Cette propriété est utile en particulier si $B(M) = 0$, alors $A(M) = R(M)$. Exemple : $A = x^n, B = x(x-1)(x-3)$ et $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque. Nous avions déjà plusieurs méthodes pour calculer la puissance n-ième d'une matrice :
1. Directement pour les matrices diagonales
2. En faisant une conjecture sur les premiers exemples puis récurrence
3. En utilisant la formule du binôme si on écrit M comme somme de deux matrices qui commutent «plus simples» (souvent diagonale + nilpotente)

On a donc une quatrième méthode : trouver un polynôme P tel que $P(M) = 0$.

♡ *Définition* 28 (Polynôme annulateur). Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P tel que $P(M) = 0$. On dit que P est **un polynôme annulateur** de M. De même, si $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $P(u) = 0$, on dira que P est **un polynôme annulateur** de u

Exemples (Endomorphismes particuliers). Les **homothéties** sont annulées par $X - \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Les **projecteurs** sont annulés par $X^2 - X$. Les **symétries** sont annulées par $X^2 - 1$. Les endomorphismes annulés par un certain X^n, $n \in \mathbb{N}$ sont dits **nilpotents**

Exercice. Soit $n \geqslant 1$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En utilisant la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe un polynôme annulateur de M de degré au plus n^2.

♠ *Remarque.* Il en existe en fait toujours un de degré au plus n, qui s'appelle *polynôme caractéristique de M*, mais c'est plus difficile à montrer.

Exercice. Soit A une matrice carrée dont $P(X) = X^3 + 2X^2 - 3X + 1$ est un polynôme annulateur. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.