Devoir Maison n°16 - Une chaîne de Markov

Dans ce problème, on identifie une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel. On considère **deux urnes** A et B contenant initialement une boule blanche et une boule noire chacune. On procède à une suite d'épreuves, chacune consistant à tirer au hasard une boule dans chaque urne et à les échanger d'urnes. Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans A avant la $(n+1)$-ème épreuve. On pose : $a_n = \mathbb{P}(X_n = 0), b_n = \mathbb{P}(X_n = 1), c_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$ et $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$

1. (a) Donner les valeurs de a_0, b_0, c_0
   $a_0 = \mathbb{P}(X_0 = 0) = 0, b_0 = \mathbb{P}(X_0 = 1) = 1, c_0 = \mathbb{P}(X_0 = 2) = 0$ car initialement l'urne A contient une boule blanche.

   (b) Déterminer la loi de X_1 et en déduire a_1, b_1, c_1
   $X_1(\Omega) = \{0; 1; 2\}$. Commençons par déterminer $\mathbb{P}(X_1 = 0)$: à l'étape 1, l'urne A contient 0 boules blanches si et seulement si on a tiré la boule blanche de l'urne A et la boule noire de l'urne B, c'est-à-dire avec probabilité $\frac{1}{4}$. $\boxed{a_1 = \mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{4}}$.
   De même pour deux boules noires : $\boxed{c_1 = \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{4}}$. On conclut donc : $\boxed{b_1 = \mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}}$

   (c) Que peut-on dire, à n fixé, de $a_n + b_n + c_n$? Justifier rigoureusement.
   À l'étape n, l'urne A contient 0, 1 ou 2 boules blanches. On en déduit que $(X_n = 0, X_n = 1, X_n = 2)$ est un système complet d'événements, donc $\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2) = a_n + b_n + c_n = 1$

2. Soit n un entier naturel non nul. On admet que sous ces conditions, a_n, b_n, c_n sont non nuls.

   (a) Soit $(i, j) \in [|0; 2|]^2$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$
   Raisonnons par disjonction de cas.
   - Si $i = 0$, alors à l'étape n, l'urne A contient deux boules noires et l'urne B deux boules blanches. À l'étape suivante, il y a alors nécessairement une boule noire de A et une boule blanche de B qui sont échangées : $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 0$; $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 1$; $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 0$
   - Si $i = 1$, alors tout se passe comme dans la question 1.b : $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}$; $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}$; $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}$
   - Si $i = 2$, alors à l'étape n, l'urne A contient deux boules blanches et l'urne B deux boules noires. Alors, à l'étape suivante, une boule blanche de A et une boule noire de B sont échangées : $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) = 0$; $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = 1$; $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = 0$

   (b) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $U_{n+1} = U_n M$
   D'après la question précédente, en utilisant la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(X_n = 0; X_n = 1; X_n = 2)$, on vérifie que la matrice M suivante convient :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $E(X_{n+1})$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}) = 1$
   Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) + 2\mathbb{P}(X_{n+1} = 2) \\ &= b_{n+1} + 2c_{n+1} \\ &= a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n + 2 \times \frac{1}{4}b_n \\ &= a_n + b_n + c_n \\ &= 1 \end{aligned}$$

   On pourrait aussi poser Y_n le nombre de boules blanches dans l'urne B. Puisque la situation est symétrique, $E(X_n) = E(Y_n)$ et $X_n + Y_n = 2$, donc $E(X_n) = E(Y_n) = 1$

   (b) Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n + 2c_n = 1$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X_n) = b_n + 2c_n = 1$

4. On pose $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que la suite $(U_nV)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique
Soit $n \in \mathbb{N}$. $U_nV = 2a_n - b_n + 2c_n$

$$\begin{aligned} U_{n+1}V &= U_nMV \\ &= U_n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= U_n \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= U_n \times \left(-\frac{1}{2}\right) V \\ &= -\frac{1}{2}(U_nV) \end{aligned}$$

Donc (U_nV) est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$

(b) En déduire le terme général de $(2a_n - b_n + 2c_n)$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_nV = 2a_n - b_n + 2c_n$ et cette suite est géométrique de raison $(-\frac{1}{2})$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2a_n - b_n + 2c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times (2a_0 - b_0 + 2c_0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times (-1)$$

5. Donner la loi de X_n
On a les équations suivantes pour tout n :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a_n & + & b_n & + & c_n & = & 1 \\ 2a_n & - & b_n & + & 2c_n & = & -\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ & & b_n & + & 2c_n & = & 1 \end{array} \right.$$

Résolvons donc ce système, avec l'opération : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a_n & + & b_n & + & c_n & = & 1 \\ & - & 3b_n & & & = & -\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2 \\ & & b_n & + & 2c_n & = & 1 \end{array} \right.$$

On obtient :

$$b_n = \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2\right)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(1 - b_n) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2\right)\right) = \frac{1}{6}\left(3 - \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2\right)\right) = \frac{1}{6}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$a_n = 1 - b_n - c_n = 1 - \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2\right) - \frac{1}{6}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = c_n$$

6. Montrer que $(a_n), (b_n), (c_n)$ convergent vers des réels a, b, c. Interpréter.
En prenant les expressions obtenues à la question précédente,

$$a_n \to \frac{1}{6}$$

$$b_n \to \frac{2}{3}$$

$$c_n \to \frac{1}{6}$$

Penser à vérifier que ces nombres sont positifs, entre 0 *et* 1 *et somment à* 1*!*

7. On se propose de retrouver la loi de X_n par une autre méthode.

(a) On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}

Par la méthode de Gauss-Jordan pour l'inversion de matrices *(poser le calcul)* : P est inversible et on trouve :

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) On pose $D = P^{-1}MP$. Calculer D puis les puissances de D

On calcule : $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. D est une matrice diagonale et on en déduit donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = U_0 M^n$ et utiliser la matrice D pour calculer les puissances de la matrice M

On le montre par récurrence immédiate avec la relation de récurrence $U_{n+1} = U_n M$. Puisque $D = P^{-1}MP$, $M = PDP^{-1}$ et par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $M^n = PD^nP^{-1}$. Connaissant une expression des puissances de D, on peut déduire après calcul :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 & -4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4 & 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 & 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4 & -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 & -4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4 & 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \end{pmatrix}$$

(d) En déduire la loi de X_n

D'après la question précédente, $U_n = U_0 M^n$, avec $U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$U_n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 & 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4 & -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \end{pmatrix}$$

On conclut finalement pour tout n :

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{2}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{6}$$

$$\mathbb{P}(X_n = 2) = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}$$

Après simplification, on retrouve les résultats de la partie précédente.