Devoir Maison n°18 (EML 2019)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On dit que A et B sont **semblables** si et seulement si il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$. On étudie dans ce problème des exemples de matrices inversibles semblables à leur inverse.

Partie A : Premier exemple

On considère l'endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que ϕ est un automorphisme.
2. Déterminer trois vecteurs u, v, w de $\mathcal{M}_{3;1}(\mathbb{R})$ tels que :

$$\ker(A - I) = \text{Vect}(u), \quad \ker\left(A - \frac{1}{2}I\right) = \text{Vect}(v), \quad \text{et } \ker(A - 2I) = \text{Vect}(w)$$

3. Vérifier que la famille $\mathcal{B}' = (v, u, w)$ forme une base de $\mathcal{M}_{3;1}(\mathbb{R})$ et préciser la matrice D de ϕ dans cette base.
4. En déduire une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ et expliciter D^{-1}
5. On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et QDQ.
6. En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Partie B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisne de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x, -z, y + 2z)$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère également les vecteurs $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$.

1. Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible. Qu'en déduit-on sur l'endomorphisme f ?
2. (a) Montrer que (u_1, u_2) forme une base de $\ker(f - id)$
   (b) Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(u_3) - u_3 = u_2$
   (c) Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que dans ce cas $\mathcal{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.
4. (a) Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathcal{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathcal{B}_2$
   (b) Justifier que M_1 et M_2 sont semblables et calculer M_1M_2.
   (c) Montrer que M et M^{-1} sont semblables.

Partie C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $N = T - I_3$

1. Justifier que la matrice T est inversible.
2. Calculer N^3 et $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$
3. En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2
4. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.
   (a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $(g \circ g)(u) \neq 0$ et $(g \circ g \circ g)(u) = 0$
   (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_3 = ((g \circ g)(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$
   (d) Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.
   (e) Montrer finalement que les matrices T et T^{-1} sont semblables