Devoir Maison n°19 - Formule de Stirling

Rappel : intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt$

1. Calculer W_0 et W_1
2. (a) Montrer que la suite (W_n) est décroissante.
   (b) Montrer, pour tout entier $n \geq 0 : W_n > 0$
3. (a) Montrer, pour tout entier $n \geq 0 : (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$
   (b) En déduire pour tout entier $n \geq 0 : (n+1)W_{n+1}W_n = W_1 W_0$
4. (a) Montrer, pour tout entier $n \geq 0 : W_n \geq W_{n+1} \geq \frac{n+1}{n+2} W_n$
   (b) En déduire : $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$ puis : $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$
5. Montrer pour tout entier $n \geq 0$:
$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \frac{\pi}{2}$$

La formule de Stirling

On note pour tout entier $n \geq 1 : A_n = \frac{1}{n!} n^n e^{-n} \sqrt{n}$ et pour tout entier $n \geq 2 : a_n = -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

1. En utilisant un développement limité, montrer que a_n est le terme général d'une série convergente.
2. Montrer pour tout entier $n \geq 2$:
$$a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$$
3. En déduire que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite ℓ est strictement positive.
4. (a) Justifier : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}$
   (b) En utilisant l'expression de W_{2n} à l'aide de factorielles, en déduire la valeur de ℓ et l'équivalent suivant :
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Application 1 (EML 2012)

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue dans l'urne des tirages avec remise. On suppose que tous les tirages sont équiprobables. On s'arrête dès que l'on obtient une boule déjà obtenue. On note T_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Justifier : $\mathbb{P}(T_n > n+1) = 0$
2. Déterminer pour tout entier $k \leq n : \mathbb{P}(T_n > k)$
3. On définit $Y_n = \frac{T_n}{\sqrt{n}}$ et on cherche à étudier le comportement asymptotique de (Y_n). Soit $y \in [0; +\infty[$ et $k_n = \lfloor y\sqrt{n} \rfloor$
   (a) Rappeler l'inégalité qui caractérise la partie entière et montrer : $k_n^2 \sim ny^2$
   (b) Justifier : $\mathbb{P}(Y_n > y) = \mathbb{P}(T_n > k_n)$
   (c) En utilisant la formule de Stirling, montrer :
$$\mathbb{P}(Y_n > y) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-k_n} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}$$
   (d) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $t \mapsto -t + (t-1)\ln(1-t)$
   (e) En déduire :
$$-k_n + (k_n - n) \ln\left(1 - \frac{k_n}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{y^2}{2}$$
   (f) Donner la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\mathbb{P}(Y_n > y)$

On a ici déterminé la limite de la fonction de répartition, ce qu'on appelle ***convergence en loi*** *de la suite (Y_n). La loi limite n'est pas une variable aléatoire discrète.*

Application 2 (CCMP PSI 2024)

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n : \Omega \to \{-1;1\})_{n\in\mathbb{N}}$ mutuellement indépendantes et centrées (i.e. $\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

1. Quelle est la loi de $\frac{1+X_n}{2}$?
2. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note A_i l'événement $(S_{2i} = 0)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note N_n le nombre d'indices $i \in [|1, n|]$ tels que A_i soit vérifié.
   (a) Supposons que pour une issue ω, les premiers termes de la suite $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ soient : $-1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, -1$. Que vaut $N_{10}(\omega)$?
   (b) On pose pour tout i une variable aléatoire Y_i qui vaut 1 quand A_i est réalisé et 0 sinon. Exprimer N_n en fonction des variables aléatoires (Y_i)
   (c) Calculer $\mathbb{P}(A_i)$ pour tout $i \in [|1; n|]$
   (d) En déduire que N_n admet une espérance finie :

$$E(N_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{2i}{i}}{4^i}$$

   (e) Soit $\ell \in \mathbb{Z}$ un entier et $n \geq 1$ un entier. En distinguant selon la parité de $\ell - n$, calculer $\mathbb{P}(S_n = \ell)$
3. On admet sans démonstration le résultat suivant :
   Théorème. Soient (a_n), (b_n) deux suites de réels non nuls avec $a_n \sim b_n$ et $\sum |b_n|$ divergente. Alors,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sim \sum_{k=1}^{n} |b_k|$$

   En déduire l'équivalent :

$$E(N_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}$$