Devoir surveillé n°6 du 9 mai

Calculatrice interdite. Tous les résultats doivent être soigneusement justifiés, que l'énoncé le précise ou non. La présentation et la rédaction sont centrales dans l'appréciation d'une copie. Le barême est indicatif et peut être modifié.

Check-list avant de rendre la copie :

- ☐ Copie tenue bras tendu : on voit les changements d'exercices et de questions.
  Pour ce faire, sauter une ligne entre les questions, encadrer les noms des exercices.
- ☐ Copie tenue bras tendu : copie aérée et lisible.
  Mettre une marge si il n'y en a pas sur la feuille, sauter des lignes si besoin, soigner la calligraphie (si besoin, écrire plus gros, sur les lignes, changer de stylo), éviter les longs paragraphes : aller à l'argument principal.
- ☐ Pages numérotées et rangées dans l'ordre.
- ☐ Exercices et questions numérotées.
- ☐ Résultats encadrés.
  À la règle, et sans surligneur.
- ☐ Phrases réponses, noms de théorèmes soulignés.
- ☐ Pas ou peu de ratures.
  Si c'est le cas, barrer proprement la question concernée, la séparer du reste du texte par deux lignes horizontales et recommencer proprement. Penser à utiliser un brouillon pour les calculs !
- ☐ Variables introduites par "soit" (quand c'est nécessaire).
  Par exemple, f ou (u_n) sont en général des variables introduites dans l'énoncé alors que x, n ne le sont pas. Les variables muettes utilisées dans une phrase quantifiée, les variables de sommation, n'ont pas besoin d'être introduites par "soit".
- ☐ Syntaxe et orthographe correctes.
  Faire en particulier attention aux mots "mathématiques" (noms de mathématiciens dans les théorèmes, termes techniques comme "asymptote", "dérivabilité"...)
- ☐ Modes de raisonnements / étapes indiquées.
  On ne ré-écrit pas l'énoncé, mais on précise "montrons maintenant que (...)", "étudions la limite de (...)" et "raisonnons par analyse-synthèse/l'absurde/récurrence/double implication..."

Exercice 1 - Lemme de Cesaro (50 pts)

On considère une suite (a_n) croissante et de limite ℓ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

1. (a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'inégalité : $b_n \leq a_n$. Étudier la monotonie de la suite (b_n)
   (b) Montrer que la suite (b_n) converge vers un réel ℓ', et que $\ell' \leq \ell$
   (c) Établir l'inégalité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}$$

   (d) En déduire que $\ell = \ell'$

   Ce résultat est en fait vrai sans l'hypothèse de croissance de (a_n) et porte le nom de lemme de Cesaro

2. On se propose maintenant d'étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$
   (a) Compléter le code suivant pour que la fonction `DS_6(n)` qui prend en entrée un entier n renvoie la valeur de S_n :

```python
def DS_6(n):
    from math import sqrt
    u = ................
    s = ................
    for k in range(...........):
        s = ......................
        u = ......................
    return s
```

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel u_n est bien défini et $u_n \geq 1$
   (c) Étudier les variations de la suite (u_n) et montrer par l'absurde que (u_n) diverge. Quelle est la limite de (u_n) ?
   (d) Montrer que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$
   (e) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f définie sur $[1; +\infty[$: $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$.
   (f) En déduire que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est croissante.
   (g) En utilisant le lemme de Cesaro, établir :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$$

3. (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $S_n = u_n^2 - 1$
   (b) En déduire un équivalent de S_n quand n tend vers $+\infty$
   (c) Proposer une fonction Python, utilisant la fonction `DS_6(n)`, qui permet de vérifier ce résultat numériquement. Décrivez le résultat attendu à l'appel de cette fonction.

Exercice 2 - Une série alternée (Écricome 2016) (44 pts)

On pourra utiliser sans justification : $2 < e^1 < 3$. Dans cet exercice, on s'intéresse à la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$, pour $n \geq 1$.

1. On note : $\forall n \geq 1, w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. On admet : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

(a) En déduire la nature de la série de terme général $w_{n+1} - w_n$

(b) Montrer que la suite (w_n) converge vers un réel γ, appelé **constante d'Euler**
C'est le même γ qu'au DM 15

2. Dresser le tableau de variations de la fonction $\phi : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sur $]0; +\infty[$. On précisera les limites aux bornes de son domaine de définition.

3. On note : $\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

   (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

   (b) En déduire que la série de terme général u_n converge. Est-elle absolument convergente ?

4. On note : $\forall n \geq 1, v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(n)^2}{2}$

   (a) Justifier que, pour tout entier $n \geq 3$:

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \frac{\ln(n)}{n}$$

   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 3}$ est décroissante et convergente.

5. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

   puis que :

$$S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{(\ln(2))^2}{2} - \ln(2)\ln(n)$$

6. Démontrer finalement que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{\ln(2)^2}{2}$$

Exercice 3 - Puissances d'une matrice (Écricome ECE 2023) (25 pts)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté par la matrice A dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$, c'est-à-dire que si $x \in \mathbb{R}^4$ et X est la matrice colonne représentant X dans la base canonique, alors $f : X \mapsto AX$.

1. Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, donner l'expression de $f(x, y, z, t)$

2. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (-1, 1, 0, 1), \quad u_2 = (0, -1, 1, 0), \quad u_3 = (0, 1, 1, 0), \quad u_4 = (1, 0, 0, 1)$$

   On note $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$

   (a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$

   (b) Déterminer la matrice M représentative de f dans la base $\mathcal{B}$ ($M = Mat_{\mathcal{B}}(f)$)

   (c) Entre A et M, quelle matrice représentative de f vous semble la plus adaptée pour effectuer des calculs ?

3. (a) Calculer A^2 et A^3, puis vérifier que $A^3 = 4A^2 - 4A$

(b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, il existe deux réels a_n, b_n tels que :

$$A^n = a_n A^2 + b_n A$$

où a_n et b_n vérifient pour tout $n \geq 1$: $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$

4. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$$

(b) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de n

(c) En déduire une expression de b_n en fonction de n

5. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$