Devoir Maison n°17 - Deux jetons (EDHEC 2005)

On considère deux jetons J_1, J_2 équilibrés. Le jeton J_1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1. Le jeton J_2 possède deux faces numérotées 1. Un·e joueur·euse choisit au hasard un jeton puis effectue une série de lancers avec ce jeton.
On note E l'événement «le jeton J_1 est choisi pour le jeu» et, pour tout entier naturel k non nul, on note U_k l'événement «le k-ème lancer fait apparaître une face numérotée 1».

Partie I : étude de quelques variables aléatoires liées à l'épreuve

1. (a) Déterminer la probabilité que le joueur obtienne n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers.
Notons $A = \bigcap_{k=1}^{n} U_k$. On cherche à déterminer $\mathbb{P}(A)$. D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(E, \overline{E})$:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}_E(A) + \mathbb{P}(\overline{E})\mathbb{P}_{\overline{E}}(A) = \frac{1}{2} \times \mathbb{P}_E(A) + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}_{\overline{E}}(A) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right)$$

(b) Les événements (U_k) sont-ils indépendants sous la probabilité $\mathbb{P}$? Sous la probabilité $\mathbb{P}_E$?
Sous la probabilité $\mathbb{P}_E$, les événements sont indépendants (c'est le modèle classique du pile ou face). Sous la probabilité $\mathbb{P}$, commençons par calculer $\mathbb{P}(U_k)$, pour k un entier naturel non nul quelconque. Comme à la question précédente :

$$\mathbb{P}(U_k) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}_E(U_k) + \mathbb{P}(\overline{E})\mathbb{P}_{\overline{E}}(U_k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Par ailleurs, si $i \neq k$ sont deux entiers différents,

$$\mathbb{P}(U_i \cap U_k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

Or, $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \neq \frac{5}{8}$. On en déduit que les événements ne sont pas deux à deux indépendants et *a fortiori* par mutuellement indépendants.

(c) Dans cette question, on suppose que le joueur a obtenu n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers. Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton J_1 ?
On cherche donc à exprimer $\mathbb{P}_A(E)$, avec A l'événement introduit à la première question. D'après la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}_A(E) = \frac{\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}_E(A) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right)} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$$

Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter ce résultat.
Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}$ tend vers 0. En effet, si on obtient un très grand nombre de 1, il est quasiment certain que l'on joue avec le jeton truqué, cette situation étant très rare avec un jeton équilibré.

2. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on pose X (resp. Y) la variable aléatoire du rang d'apparition de la première face 0 (resp. 1). Si cette face n'apparait jamais, on note $X = 0$ (resp. $Y = 0$).

(a) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $\mathbb{P}(X = n)$
Soit $n \geq 1$. $(X = n) = (X = n) \cap E$ car le jetons J_2 ne donne jamais de face numérotée 0. Or, sous la probabilité $\mathbb{P}_E$, le rang du premier o suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. On en déduit : $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}_E(X = n) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

(b) En déduire $\mathbb{P}(X = 0)$. Le résultat était-il prévisible ?
Dans le système complet d'événements associé à X, $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$ d'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 0) &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\
&= 1 - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= 1 - \frac{2}{4} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ce résultat était prévisible : si on tire le jeton J_2 (avec probabilité $\frac{1}{2}$), on n'aura jamais de face 0, mais avec J_1 la probabilité de n'obtenir que des 1 est nulle.

(c) Montrer que X admet une espérance puis déterminer $E(X)$.
X est une variable aléatoire positive, donc admet une espérance finie si et seulement si la série de terme général $n\mathbb{P}(X=n)$ converge. Or, $n\mathbb{P}(X=n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout n non nul : on reconnaît le terme général d'une série géométrique dérivée convergente. Ainsi, X admet une espérance et :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

(d) Montrer que $X(X-1)$ a une espérance puis montrer que $V(X) = 2$
On reconnaît cette fois le terme général d'une série géométrique dérivée d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{8} \times \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Or, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = 2 + 1 - 1^2 = 2$$

3. (a) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $\mathbb{P}(Y=n)$
Continuons de raisonner dans le système complet d'événements $(E, \overline{E})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y=n) &= \mathbb{P}(E)\mathbb{P}_E(Y=n) + \mathbb{P}(\overline{E})\mathbb{P}_{\overline{E}}(Y=n) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \times \delta_1^n \end{aligned}$$

où δ_1^n vaut 1 si $n=1$ et 0 sinon. On en déduit : $\mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}$ et pour tout $n \geq 2$, $\mathbb{P}(Y=n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

(b) En déduire $\mathbb{P}(Y=0)$
Dans le système complet d'événements associé à Y :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=n) = 1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y=0) &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=n) \\ &= 1 - \frac{3}{4} - \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(c) Montrer que Y admet une espérance puis déterminer $E(Y)$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{3}{4} \times 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1\right) \\ &= \frac{6}{4} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

L'espérance est un peu plus élevée que pour X puis qu'il y a une probabilité nulle d'avoir $Y = 0$

(d) Montrer que $Y(Y-1)$ admet une espérance, puis vérifier que $V(X) = \frac{5}{4}$

$$\begin{aligned} E(Y(Y-1)) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(Y=n) \\ &= 2 \end{aligned}$$

puisqu'il s'agit du même calcul que dans la question 2.d. Ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = E(Y(Y-1)) + E(Y) - E(Y)^2 = 2 + \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{2} - \frac{9}{4} = \frac{5}{4}$$

4. On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ la variable aléatoire $S = \max(X, Y)$

(a) Déterminer $S(\Omega)$
Puisqu'au moins un des deux chiffres 0 ou 1 apparaît, $S(\Omega) = [|1; +\infty[|$

(b) Montrer que $\mathbb{P}(S = 1) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$
$(S = 1) = (X = 0 \cap Y = 1) \cup (X = 1 \cap Y = 0)$. Puisque $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$, et que l'union est disjointe,

$$\mathbb{P}(S = 1) = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}_{X=0}(Y = 1) =$$

Or, $\mathbb{P}_{\overline{E}}(X = 0) = 0 : \mathbb{P}_{X=0}(Y = 1) = 1$ et $\mathbb{P}(S = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X = 0)$

(c) Soit $n \geq 2$. Comparer les événements $(X = n)$ et $(Y < n)$ et d'autre part $(Y = n)$ et $(X < n)$. En déduire : $(S = n) = (X = n) \cup (Y = n)$.
Pour $n \geq 2$, $(X = n)$ signifie que le premier 0 arrive au rang $n \geq 2$, et donc le premier 1 arrivait plus tôt. Ainsi, $(X = n) \subset (Y < n)$ et de même $(Y = n) \subset (X < n)$. Or,

$$\begin{aligned} (S = n) &= (X = n \cap Y = n) \cup (X = n \cap Y < n) \cup (Y = n \cap X < n) \text{ et l'union est disjointe} \\ &= \varnothing \cup (X = n) \cup (Y = n) \text{ d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

(d) Reconnaître la loi de S, préciser son espérance et sa variance.
Ainsi, pour $n \geq 2$,

$$\mathbb{P}(S = n) = \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(Y = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Cette formule coïncide avec $\mathbb{P}(S = 1) = \frac{1}{2}$. Ainsi, S suit une loi géométrique de raison $\frac{1}{2}$. On en déduit : $E(S) = 2$ et $V(S) = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$

5. On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ la variable $I = \min(X, Y)$

(a) Montrer que I est une variable de Bernoulli
Il suffit de constater que $I(\Omega) = \{0; 1\}$ puisqu'au moins une des deux variables vaut 1.

(b) Déterminer $\mathbb{P}(I = 0)$, en déduire la loi de I, son espérance et sa variance.
$\mathbb{P}(I = 0) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{2}$. Ainsi, $I \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$, $E(I) = \frac{1}{2}$ et $V(I) = \frac{1}{4}$

Simulation des variables aléatoires X et Y

1. On suppose avoir importé le module `numpy.random` sous le préfixe `rd`. On considère le programme suivant :

```
def edhec2005():
    X = 0
    jeton = rd.randint(1,3)
    lancer = rd.randint(2)
    if jeton == 1:
        X = 1
        while lancer != 0:
            lancer = rd.randint(2)
            X = X+1
    return X
```

   (a) Expliquer le fonctionnement de la fonction `edhec2005`. Que représente la valeur qu'elle retourne ?
   On commence par choisir uniformément un entier parmi les valeurs 1 et 2 sous la variable `jeton`. On simule ensuite des lancers via la commande `rd.randint(2)` qui renvoie uniformément 1 ou 0. Si le jeton tiré est le jeton 2, qui n'a que des faces 1, on n'obtiendra jamais de 0. Ainsi, la variable aléatoire X vaudra toujours 0. La fonction `edhec2005` ne modifie jamais sa variable `X` et renvoie donc 0. Si le jeton tiré est le jeton 1, alors des lancers sont simulés jusqu'au premier lancer qui donne un 0. Ainsi, `edhec2005` simule la variable aléatoire X

   (b) Est-on certain que le nombre de passages dans la boucle `while` est fini (i.e. que le problème termine) ?
   Si le jeton choisi est le jeton 1, il y a une probabilité nulle de n'obtenir que des 1, et donc le programme termine avec une probabilité 1

2. Écrire une fonction Python qui simule la variable aléatoire Y

```
def variable_Y():
    Y = 0
    jeton = rd.randint(1,3)
    lancer = rd.randint(2)
    if jeton == 2:
        return 1
    else:
        X = 1
        while lancer != 1:
            lancer = rd.randint(2)
            X = X+1
        return X
```