Devoir surveillé n°6 du 9 mai

Exercice 1 - Lemme de Cesaro (50 pt)

On considère une suite (a_n) croissante et de limite ℓ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_n \text{ par croissance de la suite } (a_n) \text{ (1 pt)} \\ &\leq a_n \text{(1 pt)} \end{aligned}$$

(b) Par hypothèse, la suite (a_n) est convergente, donc majorée. (1 pt) Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq a_n$, (b_n) est également majorée (1 pt). D'après le théorème de la limite monotone (1 pt), il suffit donc de montrer que la suite (b_n) est croissante. Or, pour tout entier n,

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n\right) = \frac{1}{n+1}(nb_n + a_n)$$

Ainsi,

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1}(a_n - b_n) \geq 0$$

(2 pt) On en conclut que (b_n) converge vers un réel ℓ', et par conservation des inégalités larges à la limite, $\ell' \leq \ell$ (1 pt)

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} b_{2n} &= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} a_k \\ &= \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^{2n-1} a_k\right) \text{ en séparant en deux sommes} \\ &\geq \frac{1}{2n}\left(nb_n + \sum_{k=n}^{2n-1} a_n\right) \text{ en reconnaissant } b_n \text{ et par croissance de } (a_n) \text{ (2 pt)} \\ &\geq \frac{nb_n + na_n}{2n} = \frac{b_n + a_n}{2} \end{aligned}$$

(1 pt)

(d) En passant à la limite dans cette deuxième inégalité, on obtient (1 pt) :

$$\ell' \geq \frac{\ell' + \ell}{2}$$

i.e. $2\ell' \geq \ell' + \ell$ i.e. $\ell' \geq \ell$ En combinant les deux inégalités : $\ell = \ell'$ (1 pt)

2. On se propose maintenant d'étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

(a) Compléter le code suivant pour que la fonction `DS_6(n)` qui prend en entrée un entier n renvoie la valeur de S_n :

```python
def DS_6(n):
    from math import sqrt
    u = 1
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + u
        u = sqrt(u**2 + u)
    return s
```

(3 pt)

(b) Montrons-le par récurrence. (1 pt)

- Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1 \geq 1$
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n soit bien défini avec $u_n \geq 1$. Alors, $u_n^2 + u_n \geq 1^2 + 1 = 2 \geq 0$ et donc u_{n+1} est bien défini comme racine carrée d'un nombre positif (1 pt). De plus, par croissance de la racine (1 pt), $u_{n+1} \geq \sqrt{2} \geq 1$ (1 pt)
- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ et la suite est bien définie.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $u_n \geq 1$, donc $u_n^2 + u_n \geq u_n^2$ et donc $u_{n+1} \geq \sqrt{u_n^2} = u_n$. On en déduit que la suite (u_n) est croissante (1 pt). Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge ou diverge vers $+\infty$. (1 pt) Supposons par l'absurde (1 pt) qu'il existe un réel ℓ tel que $u_n \to \ell$. Alors, par continuité de la racine carrée (1 pt), $u_{n+1} \to \sqrt{\ell^2 + \ell}$ et par unicité de la limite $\ell = \sqrt{\ell^2 + \ell}$ (1 pt). En mettant l'égalité au carré, on obtient alors $\ell^2 = \ell^2 + \ell$, ce qui implique $\ell = 0$ et qui est incompatible avec le fait que la suite (u_n) soit minorée par 1, il y a donc contradiction (1 pt). Ainsi, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ (1 pt)

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n = u_n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} - 1 \right)$$

(1 pt) D'après un équivalent classique, puisque $\frac{1}{u_n} \to 0$ (1 pt),

$$\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} - 1 \sim \frac{1}{2u_n}$$

Par produit,

$$u_{n+1} - u_n \sim u_n \times \frac{1}{2u_n} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n \to \frac{1}{2}$ (2 pt)

(e) f est dérivable sur $[1; +\infty[$ (1 pt) et pour tout $x \geq 1$:

$$f'(x) = (2x + 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x}} - 1 = \frac{2x + 1 - 2\sqrt{x^2 + x}}{2\sqrt{x^2 + x}}$$

$f'(x)$ est donc du même signe que $2x + 1 - 2\sqrt{x^2 + x}$ (1 pt) d'où :

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\iff 2x + 1 - 2\sqrt{x^2 + x} \geq 0 \\ &\iff 2x + 1 \geq 2\sqrt{x^2 + x} \\ &\iff (2x + 1)^2 \geq 4(x^2 + x) \\ &\iff 4x^2 + 4x + 1 \geq 4x^2 + 4x \\ &\iff 1 \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, f' est toujours positive (2 pt) et f est croissante. On en déduit le tableau de variations :

x	1	$+\infty$
$f(x)$	$\sqrt{2}-1$ ↗	$\frac{1}{2}$

La limite en $+\infty$ s'obtient de la même manière qu'à la question précédente (2 pt)
Remarque pour vérifier la cohérence : on sait que $\sqrt{2}-1 \simeq 0.41 < \frac{1}{2}$, donc le tableau de variations est bien cohérent, et f est croissante mais on voit qu'elle varie quand même assez peu.

(f) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + u_n} - u_n = f(u_n)$ Puisque (u_n) est croissante, $u_n \leq u_{n+1}$ et par croissance de f, $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ d'où : $u_{n+1} - u_n \leq u_{n+2} - u_{n+1}$ et la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est bien croissante. (2 pt)

(g) On a déjà établi que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est croissante et converge vers $\frac{1}{2}$. On peut donc lui appliquer le lemme de Cesaro (1 pt). Ainsi,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

(1 pt) Par télescopage, on obtient :

$$\frac{1}{n}(u_n - u_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

Ainsi, $u_n - u_0 \sim \frac{n}{2}$ et puisque u_0 est négligeable par rapport à u_n (qui tend vers $+\infty$) (1 pt), $u_n \sim \frac{n}{2}$ (1 pt)

3. (a) Par récurrence.
   - Initialisation : pour $n = 1$, $S_1 = u_0 = 1$ et $u_1^2 - 1 = \sqrt{2}^2 - 1 = 2 - 1 = 1$
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $S_n = u_n^2 - 1$. Par définition, $S_{n+1} = S_n + u_n = u_n^2 + u_n - 1 = u_{n+1}^2 - 1$ (2 pt) La récurrence est établie.
   - Conclusion : $\forall n \geq 1, S_n = u_n^2 - 1$

   (b) Puisque $u_n \sim \frac{n}{2}$, $u_n^2 \sim \frac{n^2}{4}$ (1 pt). 1 est négligeable par rapport à $\frac{n^2}{4}$, d'où : $S_n = u_n^2 - 1 \sim \frac{n^2}{4}$

   (c)
```python
def question_3b(n):
    return 4*DS_6(n)/n**2
question_3b(10000)
```

(2 pt) Le programme devrait afficher une valeur proche de 1, si l'argument avec lequel on appelle la fonction `question_3b` est suffisamment grand. On peut également tracer la courbe de `question_3b` en fonction de n pour observer un phénomène de convergence. (2 pt)

Exercice 2 - Une série alternée (Écricome 2016) (44 pt)

On pourra utiliser sans justification : $2 < e^1 < 3$. Dans cet exercice, on s'intéresse à la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$, pour $n \geq 1$.

1. On note : $\forall n \geq 1, w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. On admet : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

   (a) $w_{n+1} - w_n$ est équivalent à une suite de signe constant négatif (1 pt) et, d'après le critère de Riemann, $-\frac{1}{2n^2}$ est le terme général d'une série convergente. (1 pt) Ainsi, $\sum(w_{n+1} - w_n)$ converge. (1 pt)

   (b) D'après la question précédente, il existe un réel γ tel que $\sum_{k=1}^{n-1} w_{k+1} - w_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ (1 pt). Par télescopage (1 pt), $\sum_{k=1}^{n-1} w_{k+1} - w_k = w_n - w_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, donc $w_n \to \ell + 1$, ce qui montre la propriété demandée, avec $\gamma = \ell + 1$ (1 pt)

2. ϕ est une fonction dérivable : pour tout $t \in]0;+\infty[$, $\phi'(t) = \frac{\frac{1}{t}\times t - \ln(t)\times 1}{t^2} = \frac{1-\ln(t)}{t^2}$ (1 pt) donc :

$$\phi'(t) \geq 0 \iff 1 - \ln(t) \geq 0 \iff \ln(t) \leq 1 \iff t \leq e$$

d'où le tableau de variations (1 pt) :

x	0		e		$+\infty$
$\phi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\phi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

(2 pt)

3. On note : $\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

   — $S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = \phi(2n+2) - \phi(2n+1) \leq 0$ si $n \geq 2$ donc la suite (S_{2n}) est <u>décroissante</u> à partir d'un certain rang. (2 pt)

   — $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = \phi(2n+2) - \phi(2n+3) \geq 0$ si $n \geq 1$ donc la suite (S_{2n+1}) est <u>croissante</u> à partir d'un certain rang. (2 pt)

   — $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} = -\phi(2n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (1 pt)

   — Ainsi, les suites (S_{2n+1}) et (S_{2n}) sont adjacentes.

   (b) D'après la question précédente, S_{2n} et S_{2n+1} sont adjacentes donc, d'après un théorème du cours, convergent vers une même limite ℓ. (1 pt) D'après un autre résultat du cours, ceci permet d'affirmer que la suite (S_n) converge vers ℓ.(1 pt) Par définition d'une série convergente, ceci permet d'affirmer que u_n est le terme général d'une série convergente.(1 pt) Or, $|u_n| = \frac{\ln(n)}{n}$ et $\frac{1}{n} = o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ est le terme général d'une série divergente (2 pt) donc, par comparaison, $\sum |u_n|$ diverge, et la série de terme général u_n n'est pas absolument convergente. (1 pt)

4. On note : $\forall n \geq 1, v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(n)^2}{2}$

   (a) Soit $n \geq 3 \geq e$. D'après le tableau de variations de la fonction ϕ, ϕ est décroissante sur $[n; n+1]$, d'où pour tout $t \in [n; n+1]$ (1 pt) :

$$\phi(n+1) \leq \phi(t) \leq \phi(n)$$

   En intégrant cette inégalité sur $[n; n+1]$, par croissance de l'intégrale (1 pt) :

$$\int_n^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{n+1} dt \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(n)}{n} dt$$

   i.e.

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \frac{\ln(n)}{n}$$

   (1 pt)

   (b) Soit $n \geq 3$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(n+1)^2}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} + \frac{\ln(n)^2}{2} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \left(\frac{\ln(n+1)^2}{2} - \frac{\ln(n)^2}{2}\right) \end{aligned}$$

(2 pt) Or, d'après la question précédente,

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt = \left[\frac{1}{2}\ln(t)^2\right]_n^{n+1} = \frac{\ln(n+1)^2}{2} - \frac{\ln(n)^2}{2}$$

(2 pt) Ainsi, $v_{n+1} - v_n \leq 0$ et (v_n) est une suite décroissante. (1 pt). Par ailleurs, la deuxième inégalité sommée pour $k \in [|1;n|]$ donne :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$$

i.e. $\int_1^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq v_n + \frac{\ln(n)^2}{2}$ (1 pt) i.e. $\frac{\ln(n)^2}{2} - \frac{\ln(1)^2}{2} \leq v_n + \frac{\ln(n)^2}{2}$ i.e. $0 \leq v_n$. (1 pt) Ainsi, (v_n) est décroissante et minorée donc converge d'après le théorème de la limite monotone. (1 pt)

5. Pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k} \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k} \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= 2\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \text{ en ajoutant et soustrayant la première somme}
\end{aligned}$$

(3 pt) Finalement, les éléments pairs de $[|1;2n|]$ sont en bijection avec l'ensemble des $2k$ avec $k \in [|1;n|]$, d'où après changement de variable : (1 pt)

$$S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

D'après une propriété algébrique du logarithme népérien, $\ln(2k) = \ln(2) + \ln(k)$ (1 pt), ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2) + \ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n + \frac{\ln(n)^2}{2} - \left(v_{2n} + \frac{\ln(2n)^2}{2}\right) \\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} + \frac{\ln(n)^2 - (\ln(n) + \ln(2))^2}{2} \\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} + \frac{-2\ln(n)\ln(2) - \ln(2)^2}{2} \\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{\ln(2)^2}{2} - \ln(2)\ln(n)
\end{aligned}$$

(3 pt)

6. On sait que puisque la série de terme général u_n converge, $S_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$ (1 pt)

   Par ailleurs, (v_n) converge donc $v_n - v_{2n} \to 0$. (1 pt) Ainsi, $\ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \ln(2)\ln(n) - \frac{\ln(2)^2}{2} = \ln(2)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) + v_n - v_{2n} - \frac{\ln(2)^2}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(n)\gamma - \frac{\ln(2)^2}{2}$ (1 pt) Par unicité de la limite, (1 pt)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} = \gamma \ln(2) - \frac{\ln(2)^2}{2}$$

Exercice 3 - Puissances d'une matrice (Écricome ECE 2023) (25 pt)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté par la matrice A dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$, c'est-à-dire que si $x \in \mathbb{R}^4$ et X est la matrice colonne représentant X dans la base canonique, alors $f : X \mapsto AX$.

1. Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+t \\ x+y+z \\ x+y+z \\ x+t \end{pmatrix}$ d'où $f : (x, y, z, t) \mapsto (x+z, x+y+z, x+y+z, x+t)$ (1 pt)

2. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (-1, 1, 0, 1), \quad u_2 = (0, -1, 1, 0), \quad u_3 = (0, 1, 1, 0), \quad u_4 = (1, 0, 0, 1)$$

   On note $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$

   (a) $\mathcal{B}$ contient 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Par égalité des dimensions, il suffit de montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre. (1 pt) Soient a, b, c, d des réels tels que : $au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0$, i.e. :

$$\begin{cases} -a & & & & & + & d & = & 0 \\ a & - & b & + & c & & & = & 0 \\ & & b & + & c & & & = & 0 \\ a & & & & & + & d & = & 0 \end{cases}$$

   Effectuons les opérations : $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$:

$$\begin{cases} -a & & & & & + & d & = & 0 \\ & - & b & + & c & + & d & = & 0 \\ & & b & + & c & & & = & 0 \\ & & & & & & 2d & = & 0 \end{cases}$$

   Effectuons maintenant l'opération : $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$:

$$\begin{cases} -a & & & & & + & d & = & 0 \\ & - & b & + & c & + & d & = & 0 \\ & & & & 2c & + & d & = & 0 \\ & & & & & & 2d & = & 0 \end{cases}$$

   Le système donne immédiatement $d = 0$ puis en remontant les lignes, $c = 0, b = 0, a = 0$ et la famille $\mathcal{B}$ est libre (2 pt) donc une base de $\mathbb{R}^4$.

   (b) — $f(u_1) = (-1+1; -1+1+0; -1+1+0; -1+1) = (0; 0; 0; 0) = 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + 0u_4$ (1 pt)
   — $f(u_2) = (0+0; 0-1+1; 0-1+1; 0+0) = (0; 0; 0; 0) = 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + 0u_4$

— $f(u_3) = (0+0, 0+1+1, 0+1+1, 0+0) = (0;2;2;0) = 0u_1 + 0u_2 + 1u_3 + 0u_4$ (1 pt)
— $f(u_4) = (1+1; 1+0+0; 1+0+0; 1+1) = (2;1;1;2) = 0u_1 + 0u_2 + 1u_3 + 2u_4$ (1 pt)

On en déduit : $M = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (1 pt)

(c) M est une matrice **triangulaire** (avec beaucoup de coefficients nuls), ce qui signifie que $\mathcal{B}$ est une base plus adaptée pour l'étude de f. (2 pt)

3. (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$
$4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4(A^2 - A)$ (2 pt)

(b) Comme l'énoncé l'indique, raisonnons par récurrence.

— Initialisation : pour $n = 1$, $A^1 = 0A^2 + 1A$, ce qui initialise les suites (a_n) et (b_n) avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ (1 pt)
— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et a_n, b_n tels que $A^n = a_n A^2 + b_n A$, Alors,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= A \times (a_n A^2 + b_n A) \\ &= a_n A^3 + b_n A^2 \\ &= a_n(4A^2 - 4A) + b_n A^2 \\ &= (4a_n + b_n)A^2 - 4a_n A \end{aligned}$$

Ainsi, A^{n+1} s'exprime sous la forme $a_{n+1}A^2 + b_{n+1}A$ avec $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$. La propriété est héréditaire. (2 pt)

4. (a) D'après la question précédente, pour tout $n \geq 1$,

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} + b_{n+1} = 4a_{n+1} - 4a_n$$

(1 pt)

(b) On en déduit que (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, de polynôme caractéristique $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ (2 pt). Ainsi, d'après le théorème relatif à cette famille de suites, il existe deux réels λ, μ tels que pour tout $n \geq 1$, on ait : $a_n = (\lambda n + \mu)2^n$. Avec $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$ (1 pt), on obtient :

$$\begin{cases} 2(\lambda + \mu) = 0 \\ 4(\lambda + 2\mu) = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $\lambda = -\mu$ et $\lambda = -\frac{1}{4}$ d'où $\mu = \frac{1}{4}$ et pour tout $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{1}{4}(n-1)2^n = (n-1)2^{n-2}$$

(1 pt)

(c) Pour tout $n \geq 1$,

$$b_{n+1} = -4a_n = -4 \times (n-1)2^{n-2} = -(n-1)2^n$$

Ainsi, $b_n = -(n-2)2^{n-1}$ (2 pt)

5. Il reste à regrouper les informations de toutes les questions précédentes pour conclure. Pour tout $n \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
A^n &= a_n A^2 + b_n A \\
&= a_n \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + b_n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (n-1)2^{n-2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - (n-2)2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (n-1)2^{n-1} - (n-2)2^{n-1} & 0 & 0 & (n-1)2^{n-1} - (n- \\ 3(n-1)2^{n-2} - (n-2)2^{n-1} & (n-1)2^{n-1} - (n-2)2^{n-1} & (n-1)2^{n-1} - (n-2)2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 3(n-1)2^{n-2} - (n-2)2^{n-1} & (n-1)2^{n-1} - (n-2)2^{n-1} & (n-1)2^{n-1} - (n-2)2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n-1)2^{n-1} - (n-2)2^{n-1} & 0 & 0 & (n-1)2^{n-1} - (n- \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(3 pt)