Devoir Maison n°18 (EML 2019)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On dit que A et B sont **semblables** si et seulement si il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$. On étudie dans ce problème des exemples de matrices inversibles semblables à leur inverse.

Partie A : Premier exemple

On considère l'endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que ϕ est un automorphisme.
   A est triangulaire supérieure avec comme coefficients sur la diagonale $1, 2, \frac{1}{2}$ non nuls, donc A est inversible et ϕ est bijective. (par ailleurs ϕ est clairement linéaire puisque représentée par une matrice et c'est un endomorphisme)
2. Déterminer trois vecteurs u, v, w de $\mathcal{M}_{3;1}(\mathbb{R})$ tels que :

$$\ker(A - I) = \text{Vect}(u), \quad \ker\left(A - \frac{1}{2}I\right) = \text{Vect}(v), \quad \text{et } \ker(A - 2I) = \text{Vect}(w)$$

   $A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La première colonne est nulle, c'est-à-dire que $u = (1; 0; 0)$ convient.
   $A - \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. *Remarque : la matrice n'est clairement pas inversible car de rang 2, puisqu'il y a une ligne nulle.*
   $v = (2; 1; 0)$ convient.
   $A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Même remarque et $w = (1; 0; 1)$ convient.
3. Vérifier que la famille $\mathcal{B}' = (v, u, w)$ forme une base de $\mathcal{M}_{3;1}(\mathbb{R})$ et préciser la matrice D de ϕ dans cette base.
   $\mathcal{B}'$ contient 3 vecteurs dans $\mathcal{M}_{3;1}(\mathbb{R})$ de dimension 3, il suffit donc de vérifier que la famille est libre. Soit donc (a, b, c) un triplet de réels tels que $au + bv + cw = 0$.
   Alors :

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

   On déduit immédiatement que $b = 0$, donc dans la dernière ligne $c = 0$ et finalement $a = 0$ donc la famille $\mathcal{B}'$ est libre et est donc une base de $\mathcal{M}_{3;1}(\mathbb{R})$.
   Par ailleurs, $\phi(u) = u$, $\phi(v) = \frac{1}{2}v$ et $\phi(w) = 2w$ donc : $D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
4. En déduire une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ et expliciter D^{-1}
   D'après la formule de changement de base du cours, la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
5. On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et QDQ.
   $Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$
   $QDQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = D^{-1}$
6. En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
   $A = PDP^{-1}$ donc $A^{-1} = (PDP^{-1}) = PD^{-1}P^{-1} = PQDQP^{-1} = PQDQ^{-1}P^{-1}$ car $Q^{-1} = Q$
   Or, $D = P^{-1}AP$ Finalement : $A^{-1} = PQP^{-1}APQ^{-1}P^{-1} = (PQP^{-1})A(PQP^{-1})^{-1}$
   Ainsi, A et A^{-1} sont semblables (vérifient la définition avec PQP^{-1} qui joue le rôle du P de la définition.

Partie B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisne de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (x, -z, y+2z)$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère également les vecteurs $u_1 = (1,0,0)$ et $u_2 = (0,1,-1)$.

1. Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible. Qu'en déduit-on sur l'endomorphisme f ?
   $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
   Pour montrer que M est inversible, il suffit (par exemple) de montrer que M est de rang 3 : si $a(1;0;0) + b(0;0;1) + c(0;-1;2) = (0;0;0)$, alors $a = 0$, $-c = 0$ donc $c = 0$ et finalement $b + 2c = 0$ donc $b = 0$ et la matrice est de rang 3. On en déduit que f est un isomorphisme (automorphisme).
2. (a) Montrer que (u_1, u_2) forme une base de $\ker(f - id)$
   On commence par vérifier que u_1 et u_2 sont des vecteurs de $\ker(f - id)$: $f(u_1) = (1,0,0) = u_1$ et $f(u_2) = (0,1,-1) = u_2$. Par ailleurs, les deux vecteurs sont non colinéaires.
   Le plus simple pour justifier que $\ker(f - id)$ est de dimension 3, c'est maintenant d'en déduire que $\ker(f - id)$ est au moins de dimension 2, et n'est pas de dimension 3 car sinon on aurait $f = id$, ce qui n'est pas vrai.
   (b) Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(u_3) - u_3 = u_2$
   Cherchons u_3 sous la forme (x,y,z) : l'équation devient $(x, -z, y+2z) - (x,y,z) = (0,1,-1)$ donc $(0, -y-z, y+z) = (0,1,-1)$ i.e. $y + z = 1$ On peut prendre par exemple $u_3 = (0,0,1)$.
   (c) Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   Avec u_3 choisi à la question précédente, (u_1, u_2, u_3) est une famille échelonnée donc libre et donc une base de $\mathbb{R}^3$
3. Montrer que dans ce cas $\mathcal{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.
   On peut par exemple écrire : soient a, b, c trois réels tels que $au_1 - bu_2 + cu_3 = 0$. Alors puisque (u_1, u_2, u_3) est une famille libre, $a = 0$, $(-b) = 0$, $c = 0$ et donc $a = b = c = 0$ donc $(u_1, -u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. (a) Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathcal{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathcal{B}_2$
   $f(u_1) = u_1, f(u_2) = u_2, f(u_3) = u_2 + u_3$ d'où $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $f(u_1) = u_1, f(-u_2) = -f(u_2) = -u_2$ et $f(u_3) = u_2 + u_3 = -(-u_2) + u_3$ donc $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) Justifier que M_1 et M_2 sont semblables et calculer $M_1 M_2$.
   $M_1 = \mathcal{M}\dashv\sqcup_{\mathcal{B}_\infty}(f) = P_{\mathcal{B}_\infty \mathcal{B}_\in} \mathcal{M}\dashv\sqcup_{B_2}(f) P^{-1}_{\mathcal{B}_\infty, \mathcal{B}_\in}$ donc M_1 et M_2 sont semblables. Par ailleurs,
   $$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$
   Ainsi, $M_1 = M_2^{-1}$
   (c) Montrer que M et M^{-1} sont semblables.
   $$\begin{aligned} M &= P_{\mathcal{B}_\prime, \mathcal{B}_\infty} M_1 P^{-1}_{\mathcal{B}_\prime, \mathcal{B}_\infty} \\ &= P_{\mathcal{B}_\prime, \mathcal{B}_\infty} P_{\mathcal{B}_\infty, \mathcal{B}_\in} M_2 P_{\mathcal{B}_\in, \mathcal{B}_\infty} P_{\mathcal{B}_\infty, \mathcal{B}_\prime} \\ &= (P_{\mathcal{B}_\prime, \mathcal{B}_\infty} P_{\mathcal{B}_\infty, \mathcal{B}_\in}) M_1^{-1} (P_{\mathcal{B}_\prime, \mathcal{B}_\infty} P_{\mathcal{B}_\infty, \mathcal{B}_\in})^{-1} \\ &= (P_{\mathcal{B}_\prime, \mathcal{B}_\infty} P_{\mathcal{B}_\infty, \mathcal{B}_\in})(P^{-1}_{\mathcal{B}_\prime, \mathcal{B}_\infty} M P_{\mathcal{B}_\prime, \mathcal{B}_\infty})^{-1} (P_{\mathcal{B}_\prime, \mathcal{B}_\infty} P_{\mathcal{B}_\infty, \mathcal{B}_\in})^{-1} \\ &= (P_{\mathcal{B}_\prime, \mathcal{B}_\infty} P_{\mathcal{B}_\infty, \mathcal{B}_\in} P^{-1}_{\mathcal{B}_\prime, \mathcal{B}_\infty}) M^{-1} (P_{\mathcal{B}_\prime, \mathcal{B}_\infty} P_{\mathcal{B}_\infty, \mathcal{B}_\in} P^{-1}_{\mathcal{B}_\prime, \mathcal{B}_\infty})^{-1} \end{aligned}$$
   Donc M et M^{-1} sont semblables.

Partie C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $N = T - I_3$

1. Justifier que la matrice T est inversible.
   Matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.
2. Calculer N^3 et $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$
   $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Par ailleurs, $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 - N + N^2 + N - N^2 + N^3 = I_3 + N^3 = I_3$
3. En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2
   $T = I_3 + N$ donc $T^{-1} = I_3 - N + N^2$ (d'après la question précédente)
4. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.
   (a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $(g \circ g)(u) \neq 0$ et $(g \circ g \circ g)(u) = 0$
   Puisque $N^2 \neq 0$, il existe un vecteur u tel que $(g \circ g)(u) \neq 0$. Or puisque $N^3 = 0$, $(g \circ g \circ g)(u) = 0$
   (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_3 = ((g \circ g)(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   Soient a, b, c tels que $ag(g(u)) + bg(u) + cu = 0$. En appliquant la fonction g, par linéarité : $ag^3(u) + bg^2(u) + cg(u) = 0$ donc $bg^2(u) + cg(u) = 0$. On recommence : $cg^2(u) = 0$, et comme $g^2(u) \neq 0$, $c = 0$. Ainsi, $bg^2(u) = 0$ donc $b = 0$ et finalement $a = 0$. La famille est libre donc est une base de $\mathbb{R}^3$ par égalité des cardinaux.
   (c) Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$
   $g(g(g(u))) = 0$ et ensuite $g(g(u))$, $g(u)$ sont des vecteurs de la base d'où :
   $$\mathcal{M}\dashv\sqcup_{\mathcal{B}_3}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   (d) Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.
   $$N^2 - N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   $N^2 - N = \mathcal{M}\dashv\sqcup_{\mathcal{B}_3}(g) = P_{\mathcal{B}_\ni,\mathcal{B}_\prime}\mathcal{M}\dashv\sqcup_{B_0}(g)P_{\mathcal{B}_\prime,\mathcal{B}_\ni} = P_{\mathcal{B}_\ni,\mathcal{B}_\prime}NP^{-1}_{\mathcal{B}_\ni,\mathcal{B}_\prime}$ donc N et $N^2 - N$ sont semblables. Notons $P = \mathcal{M}\dashv\sqcup_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_0}$ pour la suite.
   (e) Montrer finalement que les matrices T et T^{-1} sont semblables
   $T^{-1} = I_3 - N + N^2 = I_3 + PNP^{-1} = P(I + N)P^{-1} = PTP^{-1}$ donc T et T^{-1} sont semblables.