Chapitre 23 : Dérivées successives

Analyse 8

I. Dérivée d'une fonction

1. Rappels : tangente, développement limité à l'ordre 1

Définition 1. f est dérivable en a de dérivée $f'(a) = \ell$ si :

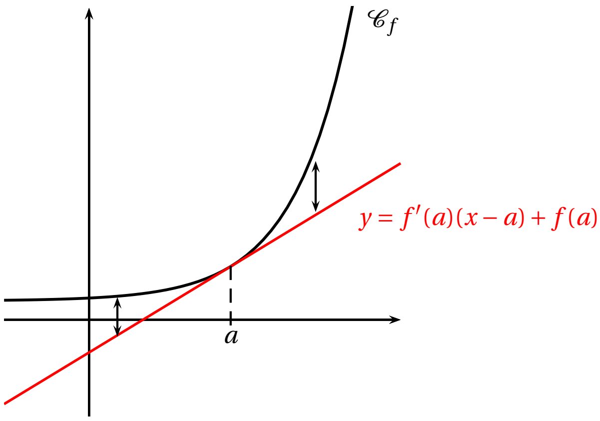
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a, x\neq a]{} \ell$$

Propriété 2. Reformulation :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell + o(1) = f'(a) + o(1) \quad \text{i.e.} \quad f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a)$$

Remarque. La dérivabilité permet donc d'approximer f par sa tangente en a, d'équation $y = f(a) + (x-a)f'(a)$
On **quantifie** l'écart : $o(x-a)$

Dessin :



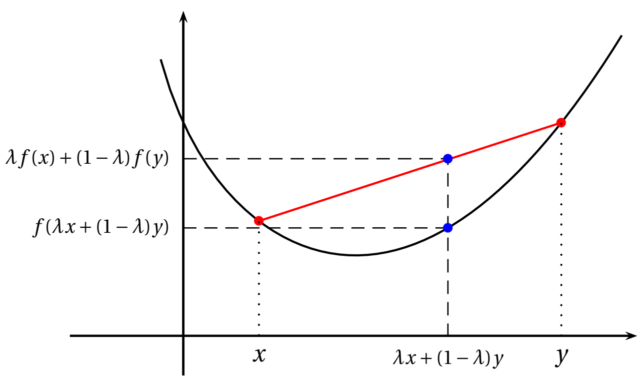
2. Une première approche de la convexité

Définition 3. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est

- **convexe** si :
$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0;1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$
- **concave** si :
$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0;1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Remarque. f est concave ssi $-f$ est convexe.

Illustration :



Fonction convexe

Remarque. Interprétation : une fonction **convexe** est une fonction dont le graphe est **au-dessous** de toutes ses *cordes*

Propriété 4 (Généralisation - admis)**.** Si f est convexe sur I, alors pour tous $x_1, \ldots, x_n \in I$ et $t_1, \ldots, t_n \geqslant 0$ vérifiant $t_1 + \ldots + t_n = 1$,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k)$$

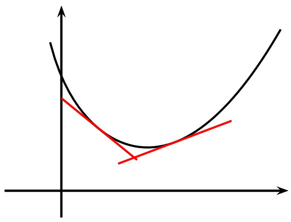
Si f est concave, avec les mêmes notations,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k)$$

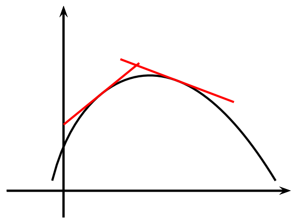
♡ **Propriété 5** (Admis)**.** Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, il y a équivalence entre

1. f convexe
2. f' croissante
3. La courbe de f est au-dessus de ses tangentes

Illustration :



Fonction ....



Fonction ....

Exemples (La dernière caractérisation : une usine à inégalités)**.**

1. $\forall x \geqslant 0, \ln(1+x) \leqslant x$
2. $\forall x \geqslant 0, \sin(x) \leqslant x$
3. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi} x$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x$

Remarque. Comment savoir que f' est croissante ? décroissante ?

II. Dérivée seconde, convexité

1. Critère de convexité

Définition 6. Si $f \in \mathscr{C}^1(I)$ a une dérivée f' elle-même de classe $\mathscr{C}^1$, alors on dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$.

Exemples. Toutes les fonctions usuelles : polynômes, $\exp, \ln, \sin, \cos, \tan, \arctan$ sur leur domaine de définition

Remarque. Comme pour les fonctions $\mathscr{C}^1$, il est possible de construire des fonctions $\mathscr{C}^1$ mais pas $\mathscr{C}^2$, ou deux fois dérivables mais pas $\mathscr{C}^2$. *Dans le cadre du programme, nous n'étudierons pas de fonctions de ce type.*

Propriété 7 (Admis)**.** Soit I un intervalle et $f \in \mathscr{C}^2(I)$.

1. f est convexe si et seulement si $f'' \geqslant 0$
2. f est concave si et seulement si $f'' \leqslant 0$

Exercice. Soit $f : \begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(\ln(x)) \end{array}$. Étudier la convexité de f. En déduire que pour tous $a, b \in]1;+\infty[$,

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a) \cdot \ln(b)}$$

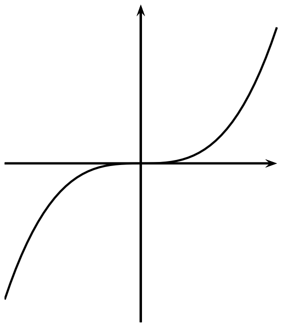
Définition 8 (Point d'inflexion)**.** On dit que x_0 est un **point d'inflexion** de f si f change de convexité en x_0.

Propriété 9 (Cas des fonctions $\mathscr{C}^2$)**.** Soit $f \in \mathscr{C}^2(I)$. Il y a équivalence entre

1. x_0 est un point d'inflexion de f
2. La courbe représentative de f traverse sa tangente en x_0
3. f'' s'annule en changeant de signe en x_0

Exemple. Étudier la convexité de $f : x \mapsto e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Illustration : un cas typique : la fonction cube



2. Optimisation

Propriété 10. Sur un segment $[a;b]$, f est bornée et atteint ses bornes. Si un extremum est atteint en c appartenant à l'intervalle **ouvert** $]a;b[$, $f'(c) = 0$
Si f définie sur un ouvert admet un extremum global ou local en c alors $f'(c) = 0$

Définition 11 (Point critique)**.** On appelle **point critique** de f tout réel c vérifiant $f'(c) = 0$

Remarque. Sur un intervalle **fermé** il y a des contre-exemples : prendre la fonction identité sur $[0;1]$

Remarque. Réciproquement, f n'atteint pas forcément d'extremum en tout point critique : penser à la fonction cube.

Propriété 12 (Minimum global - admis)**.** Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I Si f est convexe et que x_0 est un point critique de f, alors x_0 est un **minimum global**. De même si f est concave, x_0 est un **maximum global**.

Définition 13 (Extremum local)**.** Soit f deux fois définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que x_0 est

- un **maximum local** si il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset I$ de x_0 tel que pour tout $x \in \mathcal{V}, f(x) \leqslant f(x_0)$
- un **minimum local** si il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset I$ de x_0 tel que pour tout $x \in \mathcal{V}, f(x) \geqslant f(x_0)$

Exercice. Soit I un intervalle, $a \in I$ et f deux fois dérivable sur I.

1. On suppose que $f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} 3x^2$. Montrer qu'il existe un voisinage de a où $f(a)$ est le minimum de f.
2. Que dire si $f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} -x^3$?
3. Que dire si $f'(a) > 0$?
4. Que dire si $f'(a) = 0$ et $f^{(2)}(a) > 0$?

III. Fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ et formules de Taylor

L'étude des premières dérivées de f au voisinage d'un point permet donc d'approcher une courbe, de comparer une courbe et sa tangente, de trouver des extrema. On va maintenant s'intéresser aux dérivées d'ordre supérieur.

1. Fonction p fois dérivable, fonction infiniment dérivable

Définition 14. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Par récurrence, on dit

- que f est de classe $\mathscr{C}^0$ si elle est continue
- pour tout $p \in \mathbb{N}$, que f est **de classe** $\mathscr{C}^{p+1}$ si elle est dérivable et que f' est de classe $\mathscr{C}^p$. On note $f^{(p+1)}$ la dérivée $(p+1)$-ème de f.
- que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^p$ pour tout entier $p \in \mathbb{N}$

Exemples. Toutes les fonctions usuelles (polynômes, $\exp$, $\ln$, $\sin$, $\cos, \tan, \arctan, t \mapsto t^\alpha$...) sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition. On rappelle que $\sqrt{\cdot}$ ou $|\cdot|$ ne sont pas dérivables en 0, et donc pas de classe $\mathscr{C}^1$, mais sont $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition **privé de 0**

Exercice. Dérivée $p-$ième de

- $x \mapsto x^n$
- $x \mapsto \sqrt{x}$
- $x \mapsto \sin(x)$

Propriété 15 (Calcul de dérivée p-ième)**.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

- Soient $f, g \in \mathscr{C}^p(I)$ et λ, μ des réels. $\lambda f + \mu g$ est alors de classe $\mathscr{C}^p$, avec

$$(\lambda f + \mu g)^{(p)} = \lambda f^{(p)} + \mu g^{(p)}$$

♡

- Soient $f, g \in \mathscr{C}^p(I)$. Alors fg est de classe $\mathscr{C}^p$, avec

$$(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}$$

Remarque. Cette deuxième propriété, analogue à la formule du binôme de Newton, s'appelle **formule de Leibniz**.

Exemple. $f : x \mapsto (x^3 + 2x - 7)e^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Calculer toutes ses dérivées en utilisant la formule de Leibniz.

2. Formules de Taylor

♡

Théorème 16 (Taylor reste intégral)**.** Soit I un intervalle et $f \in \mathscr{C}^\infty(I)$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in I, \forall x \in I$,

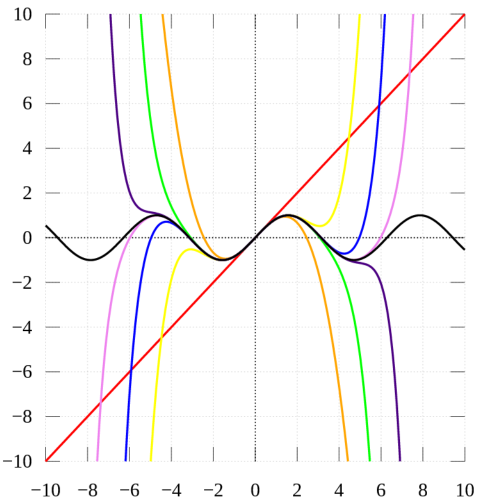
$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k \right) + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \end{aligned}$$

Démonstration.

Remarque.

- L'hypothèse $f \in \mathscr{C}^\infty$ permet de simplifier l'écriture, puisque nous appliquerons exclusivement ce théorème à des fonctions infiniment dérivables. f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ suffit à l'ordre n
- f est ainsi approchée par un **polynôme** de degré n au voisinage de a, avec une erreur explicitée sous la forme du **reste intégral**.
- Pour un polynôme, on retrouve la formule de Taylor usuelle, avec $P^{(n+1)}$ nul si P est de degré n.

Exemple.
Approximations successives de la fonction $\sin$ *au voisinage de* 0



♡ **Théorème 17** (Inégalité de Taylor-Lagrange)**.** Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(I)$, $n \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f^{(n+1)}| \leqslant M$. Alors, pour tous $a, x \in I$:

$$\left| f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right) \right| \leqslant \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Démonstration.

Exemples.
- Montrer que pour tout $a > 0, \left|\cos(a) - 1 + \frac{a}{2}\right| \leqslant \frac{a^3}{6}$ et en déduire un encadrement de $\cos\left(\frac{1}{2}\right)$
- Montrer que pour tout $a > 0$, $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}| \leqslant \frac{x^3}{3}$ et en déduire un encadrement de $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

Exemple (Convergence de la série exponentielle)**.** Démonstration d'un résultat admis au chapitre 18 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Remarque.
- Sur un segment, $f^{(n+1)}$ est toujours bornée. En particulier, sur le segment $[a;x]$ ou $[x;a]$.
- À l'ordre 0, on retrouve ....

3. Développement limité à l'ordre n

Les deux premières formules de Taylor sont dites ***globales****, puisqu'elles sont valables pour n'importe quel x dans l'intervalle I. On étudie maintenant une variante* ***locale*** *au voisinage de a.*

Définition 18 (Développement limité)**.** Soit f définie sur un intervalle I et $a \in I$, soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f **admet un développement limité d'ordre n en a** si il existe des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + \ldots + \lambda_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

ou encore :

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 h + \lambda_2 h^2 + \ldots + \lambda_n h^n + o\left(h^n\right)$$

Remarque. Si f admet un DL à l'ordre n, elle admet un DL à tous les ordres inférieurs. Comme pour les équivalents, on connaîtra surtout des DL en 0, quitte à poser $x = a + h$, avec $h \to 0$

Propriété 19 (Unicité)**.** Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, alors ce développement limité **est unique**.

Démonstration.

Propriété 20 (Premiers ordres)**.** f admet un DL d'ordre 0 en x_0 si et seulement si elle est continue en x_0, un DL d'ordre 1 si et seulement si elle est dérivable.

♡ **Théorème 21** (Taylor-Young - admis)**.** Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(I)$ et $a \in I$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

Savoir écrire en particulier avec $a = 0$

Exemples.
- Développements limités usuels : $e^x, \ln(1+x), \sin(x), \cos(x), \frac{1}{1+x}, (1+x)^\alpha$ en 0
- Déterminer un développement limité de $e^{-2(x-1)} - 6$ à l'ordre 3 en 1

Propriété 22 (Produit, somme de développements limités)**.** Soient f et g admettant des développements limités : $f(x) \underset{x \to a}{=} P(x) + o(x^n)$ et $g(x) \underset{x \to a}{=} Q(x) + o(x^n)$, soient λ, μ des réels.
- $\lambda f(x) + \mu g(x) \underset{x \to a}{=} \lambda P(x) + \mu Q(x) + o(x^n)$
- fg admet un développement limité à l'ordre n en a (produit tronqué du produit PQ) - *savoir faire sur des exemples*

Exercice.
- Calcul du $DL_3(0)$ de $\frac{\cos x}{\sqrt{1+x}}$
- Calcul du $DL_4(0)$ de $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$

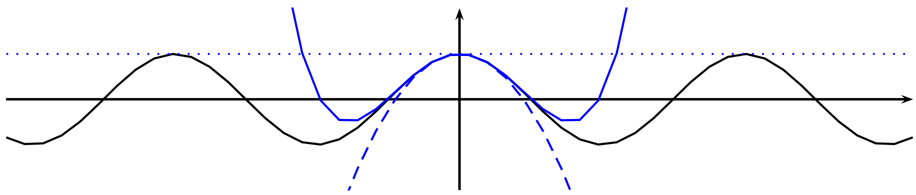
4. Allure du graphe de f

Propriété 23 (Parité)**.** Soit f une fonction paire de classe $\mathscr{C}^\infty$, alors les termes de son développement limité en 0 sont tous pairs.
Sous les mêmes hypothèses avec f impaire, tous les termes du développement limité en 0 sont impairs.

Démonstration. En exploitant d'unicité du développement limité.

Exemple. Voir les développements de $\sin$ et $\cos$.

Illustration :



Propriété 24 (Allure locale, position par rapport à la tangente)**.** Soit p un entier, a un réel et f ayant un développement limité de la forme :

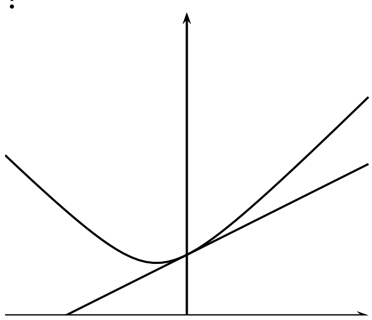
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f^{(p)}(a)(x-a)^p + o((x-a)^p)$$

Alors la position de la courbe de f par rapport à sa tangente en a dépend de la parité de p et du signe de $f^{(p)}(a)$.

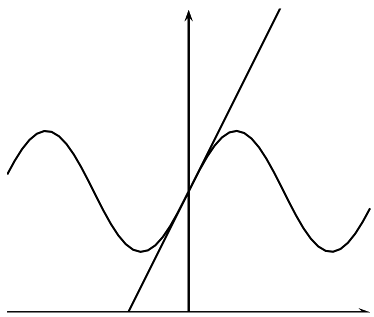
Exemple. On pose $f : x \mapsto \sqrt{1+x+x^2}$. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de sa tangente en 0 au voisinage de 0.

Exercice. Même question pour $g : x \mapsto 2+\sin(2x)$

Illustration :



Courbe de $x \mapsto \sqrt{1+x+x^2}$



Courbe de $x \mapsto 2+\sin(2x)$

Propriété 25 (Retour sur l'optimisation avec le DL_2)**.** Soit f de classe $\mathscr{C}^2$, et a point critique de a. Alors f admet un développement limité de la forme

$$f(x) = f(a) + f^{(2)}(a)\frac{(x-a)^2}{2} + o\left((x-a)^2\right)$$

- Si $f^{(2)}(a) > 0$, alors f est localement au-dessus de sa tangente : a est un minimum local
- Si $f^{(2)}(a) < 0$, alors f est localement en-dessous de sa tangente : a est un maximum local
- Si $f^{(2)}(a) = 0$, alors on ne peut pas conclure : il faut connaître un terme supplémentaire du développement limité.

Rappel des DL usuels

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + o\left(x^n\right)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o\left(x^n\right)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\tan(x) = x + o(x)$$