Feuilles d'exercices n°22

Exercice 4. Déterminer le rang des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 9 \\ 1 & 3 & 4 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 & 19 \end{pmatrix}$$

A est de rang 2 car ses 2 colonnes ne sont pas proportionnelles. B est au plus de rang 3 (car 3 lignes) et au moins de rang 2 car les deux premières lignes (ou colonnes d'ailleurs) ne sont pas proportionnelles. Par ailleurs, $(3;4;7;1) = 2(2;3;5;1) - (1;2;3;1)$ donc les trois lignes de B sont liées : $rg(B) = 2$. Finalement, étudions le rang de C. On vérifie aisément (système !) que les 4 colonnes de C sont linéairement indépendantes, donc $rg(C) = 4$

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array}$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
   Montrons que ϕ est linéaire. Soit $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$, soient M_1, M_2 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors,

$$\begin{aligned} \phi(\lambda M_1 + \mu M_2) &= A(\lambda M_1 + \mu M_2) - (\lambda M_1 + \mu M_2)A \\ &= \lambda AM_1 + \mu AM_2 - \lambda M_1 A + \mu M_2 A \text{ par distributivité} \\ &= \lambda(AM_1 - M_1 A) + \mu(AM_2 - M_2 A) \\ &= \lambda\phi(M_1) + \mu\phi(M_2) \end{aligned}$$

2. Déterminer l'image de ϕ
   Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors,

$$\begin{aligned} \phi(M) &= AM - MA \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   On en déduit que $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

3. Montrer que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est un s.e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont on déterminera une base.
   Une matrice M commute avec A ssi $AM = MA$ i.e. $AM - MA = 0$ i.e. $M \in \mathrm{Ker}(\phi)$. On en déduit que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \phi(M) = 0 &\iff \begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff c = 0 \text{ et } d - a = 0 \end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathrm{Ker}(\phi) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

♢ **Exercice 8.** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$
   Soient P, Q des polynômes de degré au plus 2 et λ, μ des réels. Alors,

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(0); (\lambda P + \mu Q)(1); (\lambda P + \mu Q)(2)) \\ &= (\lambda P(0) + \mu Q(0); \lambda P(1) + \mu Q(1); \lambda P(2) + \mu Q(2)) \\ &= \lambda(P(0); P(1); P(2)) + \mu(Q(0); Q(1); Q(2)) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

   Ainsi, f est une application linéaire (et elle est clairement à valeurs dans $\mathbb{R}^3$)
2. Montrer que f est bijective.
   Puisque $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, il suffit de montrer que f est injective, c'est-à-dire que son noyau est réduit à $\{0\}$. Soit P tel que $f(P) = 0$: $P(0) = P(1) = P(2) = 0$. Ainsi, $\deg(P) \leq 2$ et P admet trois racines distinctes : la seule solution est $P = 0$ (le polynôme nul)
3. À quel résultat sur les polynômes de second degré cette bijectivité fait-elle écho ?
   On peut voir ça comme : pour trois réels a, b, c, il existe un unique polynôme de degré au plus 2 tel que $P(0) = a, P(1) = b, P(2) = c$, c'est-à-dire une seule parabole qui passe par les points $(0; a), (1; b)$ et $(2; c)$. C'est l'analogue de degré 2 de «par 2 points du plan passe une unique droite»
4. De même avec $P \mapsto (P(0), P'(0), P''(0))$
   De même cette application (appelons-la ϕ) est linéaire par linéarité de la dérivée. Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $P(0) = P'(0) = P''(0)$. Notons a, b, c les réels tels que $P(x) = ax^2 + bx + c$. Alors, $P(0) = c = 0$, $P'(0) = b = 0$ et $P''(0) = 2a = 0$ donc $P = 0$ et ϕ est injective, donc bijective par égalité des dimensions.

Exercice 9 (Suites récurrentes linéaires)**.** Soit $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
   La fonction nulle vérifie pour tout n, $u_{n+2} = 0 = 4 \times 0 - 4 \times 0 = 4u_{n+1} - 4u_n$. Par ailleurs, si (u_n) et (v_n) sont dans F et λ, μ sont des réels, alors pour tout n :

$$(\lambda u + \mu v)_{n+2} = \lambda(4u_{n+1} - 4u_n) + \mu(4v_{n+1} - 4v_n) = 4(\lambda u_{n+1} + 4v_{n+1}) - 4(\lambda u_n + \mu v_n)$$

   Ainsi, $\lambda u + \mu v \in F$ et F est un espace vectoriel.
2. Montrer que $u : F \to \mathbb{R}^2, (u_n) \mapsto (u_0, u_1)$ est un isomorphisme.

   — Injectivité : si $(u_n) \in F$ et $(u_0, u_1) = (0, 0)$, alors par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 0$.
   — Surjectivité : soit $(a, b) \in \mathbb{R}$. La suite définie par $u_0 = a, u_1 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ est bien définie, elle est dans F et $(u_0, u_1) = (a, b)$
   — L'application est injective et surjective donc bijective, c'est donc un isomorphisme de F dans $\mathbb{R}^2$

3. En déduire la dimension de F
   D'après la question précédente, F et $\mathbb{R}^2$ sont isomorphes donc $\dim(F) = 2$
4. Montrer que $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de F
   Les deux suites sont dans F : pour tout entier n, $4 \times 2^{n+1} - 4 \times 2^n = 4 \times 2^n = 2^{n+2}$ et $4 \times (n + 1)2^{n+1} - 4 \times n \times 2^n = 4 \times 2^n \times (2(n + 1) - n) = (n + 2)2^{n+2}$. Par ailleurs, elles forment une famille libre puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires (déjà sur les deux premiers termes : $(1, 2)$ et $(0, 2)$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, ces deux suites forment une base de F. On en déduit d'ailleurs que toute suite de F s'écrit comme combinaison linéaire des deux suites, i.e. si $(u_n) \in F$: il existe λ, μ des réels tels que pour tout n :

$$u_n = \lambda 2^n + \mu n 2^n = (\lambda + \mu n)2^n$$

   On retrouve le résultat du chapitre 5.

Exercice 11. Que dire du rang des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
On pourra écrire la forme générale des matrices antisymétriques et raisonner par disjonction de cas.
Une matrice antisymétrique de taille 3 s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 0$, alors $-\frac{c}{a}\begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ -b \end{pmatrix} + \frac{b}{a}\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc les trois colonnes sont liées : le rang de la matrice est alors au plus de 2. Puisque $a \neq 0$, les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles : $rg(M) = 2$.
Si au contraire, $a = 0$, les deux premières colonnes sont proportionnelles et le rang de M est au plus de 2.
Si $b \neq 0$ ou $c \neq 0$, le rang est même exactement de 2, sinon il est de 1 voire 0 si $a = b = c = 0$.

Exercice 12. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On considère les quatre propositions :

1. $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$
2. $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$
3. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$
4. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$

Montrer que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1). En déduire que les 4 propriétés sont équivalentes.

- $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ En supposant $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$, puisque par ailleurs $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(Imf) + \dim(kerf)$ d'après la formule du rang, alors $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$
- $\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Supposons $\mathbb{R}^n = \mathrm{im}(f) \oplus \ker(f)$. Raisonnons par double inclusion : poru tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(f(x)) \in \mathrm{im}(f)$ donc $\mathrm{im}(f^2) \subset \mathrm{im}(f)$. Par ailleurs, prenons $y = f(x) \in \mathrm{im}(f)$. Puisque $\mathbb{R}^n = \mathrm{im}(f) + \ker(f)$, il existe x_1, x_2 tels que $x = f(x_1) + x_2$, avec $x_2 \in \ker(f)$. Alors, $y = f(x) = f(f(x_1) + x_2) = f(f(x_1)) + f(x_2) = f(f(x_1)) \in \mathrm{im}(f^2)$. On en déduit : $\mathrm{im}(f) \subset \mathrm{im}(f^2)$ et donc par double inclusion $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(f^2)$
- $\boxed{3 \Rightarrow 4}$ Supposons $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(f^2)$. On sait déjà que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ (c'était le résultat d'un exercice). Or, $\dim(\ker(f^2)) = n - \dim(\mathrm{im}(f^2)) = n - \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(\ker(f))$. Par inclusion + égalité des dimensions, $\ker(f) = \ker(f^2)$
- $\boxed{4 \Rightarrow 1}$ Supposons $\ker(f) = \ker(f^2)$. Soit $y \in \mathrm{im}(f) \cap \ker(f)$ i.e. il existe x tel que $y = f(x)$ et $f(y) = 0$. Alors, $f(f(x)) = 0$ i.e. $x \in \ker(f^2) = \ker(f)$ donc $f(x) = 0$ i.e. $y = 0$ et donc $\mathrm{im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$

C'est super, on a fini.

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A

1. Calculer A^2. Qu'en déduire sur f ?
   $A^2 = A$ donc $f \circ f = f$ i.e. f est un projecteur.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\ker(f)$
   La somme des trois colonnes donne 0 d'où $(1,1,1) \in \ker(f)$ et les deux premières colonnes sont libres d'où $(2,1,1), (-1,0,-1)$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{im}(f)$: par formule du rang, $(1,1,1)$ est une base du noyau et $((2,1,1),(-1,0,-1))$ est une base de l'image de f
3. Dans la base obtenue en regroupant les vecteurs des deux bases précédentes, comment s'écrit la matrice de f ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 16. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A - I_n$ **ne soit pas inversible** et $\Phi : \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ canoniquement associée à A.
Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ **non nul** tel que $\Phi(X) = X$
Si $A - I_n$ n'est pas inversible, alors $\Phi - id$ n'est pas bijectif, donc pas injectif, il existe x non nul dans le noyau de $\Phi - id$, i.e. $\Phi(x) - x = 0$ i.e. $\Phi(x) = x$

♠ **Exercice 17** (Équation aux éléments propres). Soit $\Phi : X \mapsto AX$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1. Chercher les réels λ et les matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{3;1}(\mathbb{R})$ tels que $\Phi(X) = \lambda X$
   On cherche à résoudre
   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & 2y & - & z & = & \lambda x \\ 3x & - & 2y & & & = & \lambda y \\ -2x & + & 2y & + & z & = & \lambda z \end{array}\right.$$
   i.e.
   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 3x & - & (2+\lambda)y & & & = & 0 \\ -2x & + & 2y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$
   On inverse L_1 et L_3 :
   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & 2y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \\ 3x & - & (2+\lambda)y & & & = & 0 \\ -\lambda x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$
   Puis : $L_2 \leftarrow 2L_2 + 3L_1, L_3 \leftarrow 2L_3 - \lambda L_1$
   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & 2y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \\ & & 2(1-\lambda)y & + & 3(1-\lambda)z & = & 0 \\ & & 2(2-\lambda)y & - & (2+\lambda-\lambda^2)z & = & 0 \end{array}\right.$$
   Finalement, si $\lambda \neq 1$: $L_3 \leftarrow (1-\lambda)L_3 - (2-\lambda)L_2$
   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & 2y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \\ & & 2(1-\lambda)y & + & 3(1-\lambda)z & = & 0 \\ & & & & \left[-(1-\lambda)(2+\lambda-\lambda^2) - 3(1-\lambda)(2-\lambda)\right] z & = & 0 \end{array}\right.$$
   Pour tout λ réel,
   $$\begin{aligned} -(1-\lambda)(2+\lambda-\lambda^2) - 3(1-\lambda)(2-\lambda) &= -(2+\lambda-\lambda^2-2\lambda-\lambda^2+\lambda^3) - 3(2-\lambda-2\lambda+\lambda^2) \\ &= -(2-\lambda-2\lambda^2+\lambda^3+6-9\lambda+3\lambda^2) \\ &= -\lambda^3-\lambda^2+10\lambda-8 \end{aligned}$$
   Ce polynôme en λ est nul si $\lambda = 1$, donc on peut factoriser : $-\lambda^3-\lambda^2+10\lambda-8 = -(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda-8) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+4)$
   Ainsi, si $\lambda \notin \{1; 2; -4\}$, $z = 0$ et la seule solution est $x = y = z = 0$
   Si $\lambda = 1$, on obtient : $x = y = z$, donc les vecteurs X correspondant à cette version de λ sont engendrés par $e_1 = (1; 1; 1)$. Si $\lambda = 2$, on trouve de même que les vecteurs X correspondants sont engendrés par $e_2 = (4; 3; -2)$ et idem si $\lambda = -4$, on trouve que les vecteurs X correspondants sont engendrés par $e_3 = (2; -3; 2)$
2. On trouve trois solutions (e_1, e_2, e_3) et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Donner la matrice M de Φ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$
   La question n'était pas claire puisque les multiples de e_1, e_2, e_3 conviennent aussi, ainsi que le vecteur nul pour toutes valeurs de λ. Cependant, pour les valeurs de e_1, e_2, e_3 donnés à la question précédentes, et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 2, -4)$:
   $$\mathcal{M}\dashv\sqcup_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$
3. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PMP^{-1}$
   Au vu de la propriété du cours, la matrice $P = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}$ convient. On peut d'ailleurs écrire : $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 18. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un polynôme annulateur de A de degré 2
   $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix} = 2A + 3I$
   On en déduit que $P : x \mapsto x^2 - 2x - 3$ convient.
2. En déduire que A est inversible, exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3
   Puisque $A^2 - 2A = 3I$, en factorisant on obtient : $A \times \frac{1}{3}(A - 2I) = I$, i.e. A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I)$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Déterminer R_n, le reste de la division euclidienne de x^n par $x^2 - 2x - 3$
   D'après le théorème de division euclidienne, il existe pour tout n un polynôme Q et des réels a_n, b_n tels que : $x^n = (x^2 - 2x - 3)Q(x) + a_n x + b_n = (x - 3)(x + 1)Q(x) + a_n x + b_n$
   On évalue cette égalité en 3 : $3^n = 3a_n + b_n$ et en -1 : $(-1)^n = -a_n + b_n$ d'où le système :
   $$\begin{cases} 3a_n & + & b_n & = & 3^n \\ -a_n & + & b_n & = & (-1)^n \end{cases}$$
   i.e. :
   $$\begin{cases} -a_n & + & b_n & = & (-1)^n \\ & & 4b_n & = & 3^n + 3(-1)^n \end{cases}$$
   et finalement : $b_n = \frac{1}{4}\left(3^n + 3(-1)^n\right)$ et $a_n = b_n - (-1)^n = \frac{1}{4}\left(3^n - (-1)^n\right)$
   Ainsi, $R_n(x) = \frac{1}{4}\left(3^n - (-1)^n\right)x + \frac{1}{4}\left(3^n + 3(-1)^n\right)$
   (b) En déduire une expression de A^n
   $A^n = (A^2 - 2A - 3I_3)Q(A) + a_n A + bI_3 = \frac{1}{4}\left((3^n - (-1)^n)A + (3^n + 3(-1)^n)I_3\right)$

Exercice 19. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2
   Calculons : $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = A + 2I$ donc $P(x) = x^2 - x - 2$ convient.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (a_n, b_n) qu'on déterminera tel que $A^n = a_n A + b_n I$
   On fait la même manigance qu'à l'exercice précédent ... Calculons le reste de la division euclidienne sous la forme $R_n(x) = a_n x + b_n$:
   $$x^n = Q(x)(x - 2)(x + 1) + a_n x + b_n$$
   En $x = 2$: $2^n = 2a_n + b_n$ et en $x = -1$, $(-1)^n = -a_n + b_n$, d'où $-a_n + b_n = (-1)^n$ et $3b_n = 2^n + 2(-1)^n$ i.e. $b_n = \frac{1}{3}\left(2^n + 2(-1)^n\right)$ et $a_n = b_n - (-1)^n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right)$

Exercice 21. Que dire des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **diagonales** annulées par le polynôme $X^3 + 2X - 3$?
Soit $D = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels. D est annulée par le polynôme $x^3 + 2x - 3$ ssi $D^3 + 2D - 3I_n = 0$ et puisque les opérations se font coefficient par coefficient pour les matrices diagonales, on a alors pour tout $k \in [|\lambda_1, \ldots, \lambda_n|]$, $\lambda_k^3 + 2\lambda_k - 3 = 0$. Or,
$$x^3 + 2x - 3 = (x - 1)(x^2 + x + 3)$$
Le polynôme $x^2 + x + 3$ a un discriminant négatif donc pas de racines réelles, et donc la seule valeur possible prise par chacun des λ_k est 1. On en déduit : $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$, et donc $D = I_n$

Exercice 22 (Endomorphismes cycliques : un cas particulier)**.**

1. **Cas** $n = 3$ Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $x \in \mathrm{Ker}(f^3) \backslash \mathrm{Ker}(f^2)$.
   Puisque $f^2 \neq 0$, $\ker(f^2) \neq \mathbb{R}^3$ et donc il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(x) \neq 0$. Par ailleurs, pour ce vecteur, $f^3(x) = 0$ et donc $x \in \ker(f^3) \backslash \ker(f^2)$ *On dit que f est nilpotente d'indice* 3
2. **Cas général** Soit E de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$ tel que $f^n(x) = 0$ et $f^{n-1}(x) \neq 0$
   (a) Montrer que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E
   Puisque cette famille contient n vecteurs, il suffit de vérifier que la famille est libre. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1})$ des réels tels que
   $$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x) = 0$$
   Supposons par l'absurde qu'il y ait un premier entier r tel que $\lambda_r \neq 0$.
   En appliquant l'application f^{n-r-1}, on obtient : $\sum\limits_{k=r}^{n-1} \lambda_k f^{n+k-r-1}(x) = 0$ et puisque pour tout $k \geq r+1, n+k-r-1 \geq n$, $f^{n+k-r-1} = 0$ et il reste seulement $\lambda_r f^{n-1}(x) = 0$. Puisque $f^{n-1}(x) \neq 0$, $\lambda_r = 0$, ce qui est une contradiction avec l'hypothèse. Ainsi, tous les coefficients sont nuls et $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E
   (b) Préciser la matrice de f dans cette base
   $$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (c) En déduire une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$
   Une base de $\ker(f)$ est $(f^{n-1}(x))$ et une base de $\mathrm{im}(f)$ est $(f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$

♠ **Exercice 23** (Interpolation de Lagrange, un argument abstrait)**.** Soient n un entier et $(a_0, \ldots, a_n)$ des réels distincts. Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire que si $(b_0, \ldots, b_n)$ sont des réels, il existe un unique polynôme P de degré au plus n tel que :
$$\forall i \in [|0; n|], P(a_i) = b_i$$

Φ est linéaire (à vérifier si besoin) et injective : en effet, si $P(a_0) = P(a_1) = \ldots = P(a_n)$ alors P est de degré au plus n et a $n+1$ racines distinctes, donc P est le polynôme nul : $\ker(\Phi) = \{0\}$.
Puisque $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = \dim(\mathbb{R}^{n+1}) = n+1$, Φ est un isomorphisme i.e. est bijectif. Ainsi, à $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ fixé, le $n+1$-uplet a un unique antécédent $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que : $\Phi(P) = (b_0, \ldots, b_n)$ i.e. pour tout $i \in [|0; n|], P(a_i) = b_i$ *Retrouver ce résultat dans un exercice du chapitre 11*

Exercice 24. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \sum\limits_{k=0}^{n} Q^{(k)}$.

On pose comme à l'exercice précédent une application $\Phi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ qui à Q associe $\sum\limits_{k=0}^{n} Q^{(k)}$. Puisque la dérivation et la somme sont linéaires, Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ (car la dérivation et la somme ne font que perdre des degrés).
Il reste à montrer que Φ est injective et on pourra en déduire qu'elle est surjective et donc que P admet un unique antécédent. *Indication : on pourra montrer qu'une application bien choisie est un automorphisme.*