Formule de Taylor-Young - démonstration

Énoncé : Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ et $a \in I$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right)$$

Démonstration

On montre cette formule par récurrence. Posons donc pour tout n entier la propriété : $\mathcal{P}(n)$: **pour toute fonction de classe** $\mathcal{C}^\infty$ sur I, pour tout $a \in I$,

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right)$$

1. <u>Initialisation :</u> pour $n = 0$: toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ est en particulier continue, d'où $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$ i.e. $f(x) = f(a) + o(1)$.
   La propriété $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée, donc la récurrence est initialisée.
2. <u>Hérédité :</u> Soit n un entier quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$: soit f une fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   Puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, f' est aussi $\mathcal{C}^\infty$. Par hypothèse de récurrence, on peut donc écrire qu'il existe une fonction ε_0 définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de a, qui tend vers 0 en a, telle que pour tout $x \in \mathcal{V}$:

   $$f'(x) = f'(a) + f^{(2)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_0(x)$$

   Intégrons maintenant cette égalité sur $[a;x]$:

   $$\begin{aligned}\int_a^x f'(t)dt = &\int_a^x f'(a)dt \\ &+ \int_a^x f^{(2)}(a)(t-a)dt \\ &+ \ldots + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(t-a)^n dt \\ &+ \int_a^x (t-a)^n\varepsilon_0(t)dt\end{aligned}$$

   i.e.

   $$\begin{aligned}f(x) - f(a) = &f'(a)(x-a) \\ &+ f^{(2)}(a)\frac{(x-a)^2}{2} \\ &+ \ldots + f^{(n+1)}(a)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &+ \int_a^x (t-a)^n\varepsilon_0(t)dt\end{aligned}$$

   Il suffit pour conclure de montrer que $\int_a^x (t-a)^n\varepsilon_0(t)dt = o((x-a)^{n+1})$
   Or, puisque $\varepsilon_0(t) \xrightarrow[t\to a]{} 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in I$ tel que $|t-a| < \eta$, alors $|\varepsilon_0(t)| < \varepsilon$
   Soit x tel que $|x-a| < \eta$. Alors pour tout t dans $[x;a]$ ou $[a;x]$, $|t-a| < \eta$ et donc :

   $$\left|\int_a^x (t-a)^n\varepsilon_0(t)dt\right| \leq \int_a^x |t-a|^n\varepsilon dt \leq \varepsilon\frac{|x-a|^{n+1}}{n+1}$$

   i.e. $\frac{\left|\int_a^x (t-a)^n\varepsilon_0(t)dt\right|}{|x-a|^{n+1}} \leq \frac{\varepsilon}{n+1}$ qui est aussi arbitraire que ε. Donc $\int_a^x (t-a)^n\varepsilon_0(t)dt = o((x-a)^{n+1})$ et on conclut :

   $$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1})$$

   La propriété est donc héréditaire et donc vraie pour tout entier n.

Qu'en retenir ?

1. Les o s'intègrent bien ! (mais se dérivent mal)
2. Pour démontrer une propriété sur o, revenir à la définition, c'est-à-dire à ε
3. Les factorielles dans les formules de Taylor viennent naturellement de la primitivation successive des polynômes