Devoir surveillé n°7 du 28 mai (CB n°2)

Calculatrice interdite. Tous les résultats doivent être soigneusement justifiés, que l'énoncé le précise ou non. La présentation et la rédaction sont centrales dans l'appréciation d'une copie. Le barême est indicatif et peut être modifié.

Check-list avant de rendre la copie :

- ☐ Copie tenue bras tendu : on voit les changements d'exercices et de questions.
  Pour ce faire, sauter une ligne entre les questions, encadrer les noms des exercices.
- ☐ Copie tenue bras tendu : copie aérée et lisible.
  Mettre une marge si il n'y en a pas sur la feuille, sauter des lignes si besoin, soigner la calligraphie (si besoin, écrire plus gros, sur les lignes, changer de stylo), éviter les longs paragraphes : aller à l'argument principal.
- ☐ Pages numérotées et rangées dans l'ordre.
- ☐ Exercices et questions numérotées.
- ☐ Résultats encadrés.
  À la règle, et sans surligneur.
- ☐ Phrases réponses, noms de théorèmes soulignés.
- ☐ Pas ou peu de ratures.
  Si c'est le cas, barrer proprement la question concernée, la séparer du reste du texte par deux lignes horizontales et recommencer proprement. Penser à utiliser un brouillon pour les calculs !
- ☐ Variables introduites par "soit" (quand c'est nécessaire).
  Par exemple, f ou (u_n) sont en général des variables introduites dans l'énoncé alors que x, n ne le sont pas. Les variables muettes utilisées dans une phrase quantifiée, les variables de sommation, n'ont pas besoin d'être introduites par "soit".
- ☐ Syntaxe et orthographe correctes.
  Faire en particulier attention aux mots "mathématiques" (noms de mathématiciens dans les théorèmes, termes techniques comme "asymptote", "dérivabilité"...)
- ☐ Modes de raisonnements / étapes indiquées.
  On ne ré-écrit pas l'énoncé, mais on précise "montrons maintenant que (...)", "étudions la limite de (...)" et "raisonnons par analyse-synthèse/l'absurde/récurrence/double implication..."

Exercice 1 - Pièces truquées (issu des oraux ESCP)

Soient p_1, p_2 des réels de $]0;1[$. On considère deux pièces de monnaie A_1, A_2. Lorsqu'on lance la pièce A_1 (resp. A_2), la probabilité d'obtenir Face est p_1 (resp. p_2)
On effectue à l'aide de ces deux pièces une succession de lancers selon la règle suivante :

- Pour la première partie, on lance une pièce au hasard, de manière équiprobable, et on lance la pièce.
- À partir du deuxième lancer, on joue la n-ième partie avec la pièce A_1 si on a obtenu un Face au $n-1$-ième lancer, avec la pièce A_2 si on a obtenu Pile au $n-1$ième lancer (le lancer précédent).

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n la probabilité d'obtenir Face lors de la n-ième partie. On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

1. (a) Exprimer u_1 puis u_2 en fonction de p_1 et p_2
   (b) Déterminer deux réels a, b (à exprimer en fonction de p_1 et p_2) tels que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = au_n + b$$
   (c) Donner l'expression du terme général de u_n en fonction de n puis donner la limite u de (u_n)
   (d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur p_1 et p_2 pour avoir $u = \frac{1}{2}$
   (e) On suppose dans cette question seulement que $p_1 = 0$ et $p_2 = 1$. Étudier alors la suite (u_n)
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat de la n-ième partie est Face et 0 si le résultat est Pile.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_n
   (b) Déterminer l'espérance de X_n
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur p_1 et p_2 pour que les événements $(X_1 = 1)$ et $(X_2 = 1)$ soient indépendants. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p_1 et p_2 pour que les événements $(X_1 = 0)$ et $(X_2 = 0)$ soient indépendants.

Exercice 2 - Matrices commutant avec des puissances de S (Écricome 2004)

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ($n \geq 1$) et E l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $n-1$. On considère n réels deux à deux distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et D la matrice diagonale $D = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On considère P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = PDP^{-1}$.
L'objet de cet exercice est de montrer que, si k est un entier naturel impair et si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec S^k, alors elle commute avec S.
Dans la suite, k désigne un entier naturel impair fixé. Dans la dernière question, on étudiera un contre-exemple si k est un entier pair.

1. On considère l'application f de E dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme T fait correspondre le vecteur de $\mathbb{R}^n$: $f(T) = (T(\lambda_1^k), T(\lambda_2^k), \ldots, T(\lambda_n^k))$
   (a) Montrer que $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ sont des réels deux à deux distincts.
   (b) Montrer que f est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$.
   (c) En déduire l'existence d'un unique polynôme U de E tel que :
   $$U(\lambda_1^k) = \lambda_1, U(\lambda_2^k) = \lambda_2, \ldots, U(\lambda_n^k) = \lambda_n$$
2. On note $R = U(X^k) - X$.
   (a) Écrire la forme de D^k puis montrer que R est un polynôme annulateur de D
   (b) En déduire que R est un polynôme annulateur de S.
3. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $AS^k = S^kA$
   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel p,
   $$AS^{pk} = S^{pk}A$$

(b) En déduire que pour tout polynôme Q, $AQ(S^k) = Q(S^k)A$

(c) En déduire que les matrices A et S commutent, c'est-à-dire que :

$$AS = SA$$

4. On considère les deux matrices A et S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) En étudiant l'endomorphisme canoniquement associé à S, dans la base $\mathcal{B} = ((1;1);(1;-1))$ de $\mathbb{R}^2$, montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telles que :

$$S = PDP^{-1}$$

(b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, A commute avec S^{2k}

(c) Vérifier qu'en revanche, A et S ne commutent pas.

Problème - Une intégrale à paramètre (adapté de EML 2010)

L'objectif du problème est d'étudier l'application f définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$

Préliminaires

1. Justifier la convergence des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \quad ; \quad \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad ; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

2. En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

3. En déduire : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

Partie I : Simulation numérique de f

1. Écrire une fonction Python `g(x,t)` qui prend en argument deux réels x, t avec $x \geq 0$ et t strictement positif, et qui renvoie $\frac{t^x}{1+t}$

2. Compléter le code Python suivant pour qu'il demande à l'utilisateur une valeur de x et un entier n. Le programme donne une valeur approchée de $f(x)$ à l'aide de la méthode des rectangles avec le n choisi. On pourra faire appel à la fonction g de la question précédente.

```
from numpy import exp, log
x = ..............................
n = ..............................
def f(n,x):
    s = .........................
    for k in range(1,n+1):
        s = .....................
    return ...................
print(f(n,x))
```

3. À l'aide de la fonction `f(x)` définie plus tôt, compléter le code suivant pour qu'il trace la courbe représentative de f sur l'ensemble $[0;10]$. On suppose qu'on dispose encore de la valeur de n donnée à la question précédente.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(.........................)
y = np.array(............................)
....................................
plt.show()
```

Partie II : Éléments d'étude de f

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$
2. Montrer :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}$$
En déduire la limite de f en $+\infty$
3. (a) Montrer : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \forall t \in]0;1], x \leq y \Rightarrow t^x \geq t^y$
   (b) En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$
4. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$
5. En déduire une valeur approchée de $f(2)$ et de $f(3)$ (on pourra prendre $\ln(2) \simeq 0.69$). Montrer : $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$
6. Soit $x \geq 0$.
   (a) Montrer par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$$
   (b) En déduire que la série numérique de terme général $\frac{(-1)^k}{k+1+x}$ converge et :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$$
7. (a) Montrer :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \forall k \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| \leq |x-y| \frac{1}{k^2}$$
   (b) En déduire : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, |f(x) - f(y)| \leq |x-y| \times \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6} \right)$
   (c) En déduire finalement que f est continue sur $\mathbb{R}_+$

Partie III : Dérivabilité de f

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k l'application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \geq 0$ par :
$$g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1+x}$$

1. Montrer :
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \forall k \in \mathbb{N}^*, |g_k(x) - g_k(y) - (x-y) g_k'(x)| \leq \frac{|x-y|^2}{k^3}$$
2. (a) Soit $x \geq 0$. Justifier la convergence des séries de terme général $\frac{1}{k^3}$ et $g_k'(x)$
   (b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :
$$\forall x \geq 0, f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}$$
   (c) Déterminer $f'(0)$
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On donne la valeur approchée : $\ln(2) \simeq 0,69$