Devoir surveillé n°7 du 28 mai (CB n°2) - Corrigé

Exercice 1 - Pièces truquées (issu des oraux ESCP) (23 pt)

1. (a) Introduisons pour tout n l'événement F_n : «le n-ième lancer donne Face», et notons A_1, A_2 les événements : le premier lancer est fait avec la pièce A_1, A_2.(1 pt) D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements (A_1, A_2),(1 pt) on peut écrire les égalités suivantes.

$$u_1 = \mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(F_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}(F_1) = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 = \frac{p_1+p_2}{2}$$

$$u_2 = \mathbb{P}(F_2) = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}_{F_1}(F_2) + \mathbb{P}(\overline{F_1})\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(F_2) = u_1p_1 + (1-u_1)p_2 = u_1(p_1-p_2) + p_2 = \frac{p_1^2-p_2^2}{2} + p_2$$

(1 pt)

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme à la question précédente, utilisons la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(F_n, \overline{F_n})$ (1 pt) :

$$u_{n+1} = \mathbb{P}(F_{n+1}) = \mathbb{P}(F_n)\mathbb{P}_{F_n}(F_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{F_n})\mathbb{P}_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) = u_np_1 + (1-u_n)p_2 = u_n(p_1-p_2) + p_2$$

(1 pt) Ainsi, $a = p_1 - p_2$ et $b = p_2$ conviennent. (1 pt)

(c) La suite (u_n) est donc arithmético-géométrique(1 pt), de point fixe $\ell = \frac{b}{1-a} = \frac{p_2}{1-p_1+p_2}$. D'après un théorème du cours, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = (p_1-p_2)^{n-1}(u_1-\ell) + \ell = (p_1-p_2)^{n-1}\left(\frac{p_1+p_2}{2} - \frac{p_2}{1-p_1+p_2}\right) + \frac{p_2}{1-p_1+p_2}$$

(1 pt) Puisque $p_1, p_2 \in]0;1[$, alors $p_1 - p_2 \in]-1;1[$ et donc la suite (u_n) converge vers une limite $u = \ell = \frac{p_2}{1-p_1+p_2}$ (1 pt)

(d) $u = \frac{1}{2} \iff \frac{p_2}{1-p_1+p_2} = \frac{1}{2} \iff 1 - p_1 + p_2 = 2p_2 \iff p_1 + p_2 = 1$(2 pt) (interprétation ?)

(e) Si $p_1 = 0$ et $p_2 = 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = -u_n + 1$ et $u_1 = \frac{1}{2}$. On vérifie par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{2}$ (2 pt)

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat de la n-ième partie est Face et 0 si le résultat est Pile.

(a) Par définition, $X_n(\Omega) = \{0;1\}$ donc X_n suit une loi de Bernoulli (1 pt) de paramètre $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(F_n) = u_n$ (1 pt)

(b) D'après le cours, $E(X_n) = u_n$ (1 pt)

(c) Calculons les probabilités de $\mathbb{P}(X_1 = 1), \mathbb{P}(X_2 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1 \cap X_2 = 1)$
$\mathbb{P}(X_1 = 1) = u_1 = \frac{p_1+p_2}{2}$, (1 pt) $\mathbb{P}(X_2 = 1) = u_2 = \frac{p_1^2-p_2^2}{2} + p_2$.(1 pt)
Finalement, $\mathbb{P}(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 1) = u_1p_1 = p_1\frac{p_1+p_2}{2}$(1 pt). Ainsi, $X_1 = 1$ et $X_2 = 1$ sont indépendants si et seulement si :

$$p_1 \times \frac{p_1+p_2}{2} = \frac{p_1+p_2}{2} \times \left(\frac{p_1^2-p_2^2}{2} + p_2\right) \quad i.e. \quad (p_1+p_2 = 0) \text{ ou } p_1 = \frac{p_1^2-p_2^2}{2} + p_2$$

(1 pt) Or, $p_1+p_2 > 0$. Il reste donc le cas $2(p_1-p_2) = p_1^2-p_2^2 = (p_1-p_2)(p_1+p_2)$ i.e. $p_1 = p_2$ ou $p_1+p_2 = 2$. Puisque $p_1 + p_2 < 2$ par hypothèse, $(X_1 = 1)$ et $(X_2 = 1)$ sont indépendants si et seulement si $p_1 = p_2$. (2 pt) C'est aussi une condition nécessaire et suffisante pour que les événements $(X_1 = 0)$ et $(X_2 = 0)$ soient indépendants, puisque ce sont les complémentaires des événements $(X_1 = 1)$ et $(X_2 = 1)$ (1 pt)

Exercice 2 - Matrices commutant avec des puissances de S (Écricome 2004) (29 pt)

1. On considère l'application f de E dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme T fait correspondre le vecteur de $\mathbb{R}^n$: $f(T) = (T(\lambda_1^k), T(\lambda_2^k), \ldots, T(\lambda_n^k))$
   (a) Puisque k est impair, la fonction $x \mapsto x^k$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective (1 pt). Puisque $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont deux à deux distincts, c'est aussi le cas de $(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$ (1 pt)
   (b) f est linéaire puisque l'évaluation en chaque réel λ_i^k l'est (1 pt), montrons donc que f est bijective.
   Soit $T \in E. T \in \ker(f) \iff T(\lambda_1^k) = T(\lambda_2^k) = \ldots = T(\lambda_n^k)$
   Or, d'après la question précédente, T aurait alors n racines distinctes (1 pt) en étant de degré inférieur ou égal à $n-1$. Ainsi, T est nécessairement le polynôme nul (1 pt) : f est injective, donc bijective puisque $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$ (1 pt)
   (c) Puisque f est bijective, tout élément de $\mathbb{R}^n$ admet un unique antécédent (1 pt), y compris $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (1 pt) qui admet un unique antécédent $U \in E$
2. On note $R = U(X^k) - X$.
   (a) D^k est diagonale de diagonale $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$. (1 pt) Ainsi, $U(D^k) = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = D$ et donc $R(D) = D - D = 0$. R est donc un polynôme annulateur de D. (1 pt)
   (b) Notons $R = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ (1 pt). Alors, $R(S) = \sum_{k=0}^{n} a_k S^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (PDP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{n} a_k PD^k P^{-1} = R(D) = 0$ (2 pt) donc R annule S.
3. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $AS^k = S^k A$
   Raisonnons par récurrence.
   (a) — Initialisation : pour $p = 0$, $S^{pk} = S^0 = I_n$, d'où $AS^{pk} = AI_n = A = I_n A = S^{pk} A$ (1 pt)
   — Hérédité : Soit p un entier naturel tel que $AS^{pk} = S^{pk} A$. Alors :

$$\begin{aligned} AS^{(p+1)k} &= AS^{pk} S^k \text{(1 pt)} \\ &= S^{pk} AS^k \text{ par hypothèse de récurrence (1 pt)} \\ &= S^{pk} S^k A \text{ par hypothèse(1 pt)} \\ &= S^{(p+1)k} A \end{aligned}$$

   — Conclusion : $\forall p \in \mathbb{N}, AS^{pk} = S^{pk} A$
   (b) Soit Q un polynôme. Notons $Q = \sum_{p=0}^{m} a_p x^p$.(1 pt) Alors,

$$\begin{aligned} AQ(S^k) &= A \sum_{p=0}^{m} a_p (S^k)^p \text{(1 pt)} \\ &= \sum_{p=0}^{m} a_p AS^{pk} \text{ par distributivité(1 pt)} \\ &= \sum_{p=0}^{m} a_p S^{pk} A \text{ d'après la question a (1 pt)} \\ &= Q(S^k) A \end{aligned}$$

   (c) D'après la question 2, $U(S^k) = S$. Ainsi, en appliquant le résultat de la question précédente au polynôme U, (1 pt) on obtient :

$$AS = SA$$

   A et S commutent.

4. On considère les deux matrices A et S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à S. (1 pt) Dans la base $\mathcal{B}$, $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2 pt)

   Ainsi, en notant $P = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (1 pt) et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a par formule de changement de base(1 pt) : $S = PDP^{-1}$

   (b) $S^{2k} = I_2$ et I_2 commute avec toute matrice (1 pt), y compris avec A

   (c) On trouve : $AS = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $SA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ donc $AS \neq SA$: A et S ne commutent pas. (1 pt)

Problème - Une intégrale à paramètre (adapté de EML 2010)

Préliminaires (11 pt)

1. La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente d'après le critère de Riemann (1 pt). De même, puisque $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$, la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente (1 pt) et finalement $\frac{1}{(2k+1)^2} \sim \frac{1}{4k^2}$ (1 pt) qui est le terme général d'une série convergente. (1 pt)
2. En séparant les termes pairs et impairs(1 pt), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \text{(1 pt)} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}
\end{aligned}$$

   On en déduit : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$ (1 pt)
3. Encore une fois, séparons les termes pairs et impairs(1 pt), puisque toutes ces séries sont convergentes (1 pt) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)^2} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \text{(1 pt)} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} \\
&= -\frac{\pi^2}{12} \text{(1 pt)}
\end{aligned}$$

Partie I : Simulation numérique de f (9 pt)

1.
```python
from numpy import exp, log
def g(x,t):
    return exp(x*log(t))/(1+t)
```

(2 pt)

2. Compléter le code Python suivant pour qu'il demande à l'utilisateur une valeur de x et donne une valeur approchée de $f(x)$ à l'aide de la méthode des rectangles. On pourra faire appel à la fonction g de la question précédente.

```python
from numpy import exp, log
x = float(input("entrez un réel x positif"))
n = int(input("donnez le degré de précision"))
def f(n,x):
    s = 0
    for k in range(1,n+1):
        s = s + g(x, k/n)
    return s
print(f(n,x))
```

(4 pt)

3. À l'aide de la fonction `f(x)` définie plus tôt, compléter le code suivant pour qu'il trace la courbe représentative de f sur l'ensemble $[0;10]$:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(0, 10, num = 100) # ou n'importe quel nombre de points
#la valeur par défaut est 50
y = np.array([f(n,t) for t in x])
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

(3 pt)

Partie II : Éléments d'étude de f (41 pt)

1.
$$f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$$
$$f(1) = \int_0^1 \frac{t}{1+t}dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = [t - \ln(1+t)]_0^1 = 1 - \ln(2)$$

(2 pt)

2. Soit $x \geq 0$.
Pour $t \in [0;1]$, $\frac{1}{1+t} \leq 1$ donc $\frac{t^x}{1-t} \leq t^x$. (1 pt) Ainsi :
$$0 \leq f(x) \leq \int_0^1 t^x dt = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{x+1}$$
(1 pt) On en déduit par théorème des gendarmes (1 pt) : $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

3. (a) Soient x, y des réels positifs, supposons $x \leq y$. Soit $t \in]0;1]$. Puisque $\ln(t) \leq 0$ (1 pt), $x\ln(t) \geq y\ln(t)$. Par croissance de l'exponentielle(1 pt), on a donc $\exp(x\ln(t)) \geq \exp(y\ln(t))$ i.e. $t^x \geq t^y$

   (b) Reprenons $x, y \in \mathbb{R}_+$. D'après la question précédente, pour tout $t \in]0;1]$, $t^x \geq t^y$ et pour $t = 0$, $t^x = t^y = 0$ (1 pt), d'où : pour tout $t \in [0;1]$, $t^x \geq t^y$.(1 pt)
   Puisque pour tout $t \in]0;1]$, $\frac{1}{1+t} \geq 0$ (1 pt), $\frac{t^x}{1+t} \geq \frac{t^y}{1+t}$
   Par croissance de l'intégrale(1 pt), on obtient : $f(x) \geq f(y)$ et donc f est décroissante.

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} f(x) + f(x+1) &= \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{t^x}{1+t} + \frac{t \times t^x}{1+t} \right) dt \text{ par linéarité (1 pt)} \\ &= \int_0^1 \frac{t^x(1+t)}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 t^x dt \\ &= \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

(2 pt)

5. $f(1) + f(2) = \frac{1}{2}$ donc $f(2) = \frac{1}{2} - f(1) = \frac{1}{2} - (1 - \ln(2)) = \ln(2) - \frac{1}{2} \simeq 0.69 - 0.5 \simeq 0.19$ (2 pt)
De même, $f(3) = \frac{1}{3} - f(2) \simeq 0.33 - 0.19 \simeq 0.14$ (2 pt)
On a avec l'égalité précédente, pour tout $x \geq 1$,

$$f(x) + f(x-1) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$$

(1 pt) Par décroissance de f (1 pt), on obtient : $\frac{1}{x+1} \leq 2f(x) \leq \frac{1}{x}$ donc $\frac{x}{x+1} \leq 2xf(x) \leq 1$ (1 pt)
Par théorème des gendarmes(1 pt), puisque $\frac{x}{x+1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$, $2xf(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ (1 pt) i.e. $f(x) \sim \frac{1}{2x}$

6. Soit $x \geq 0$.

   (a) — <u>Initialisation :</u> pour $n = 0$, $(-1)^{0+1} f(0+1+x) + \sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k}{k+1+x} = -f(x+1) + \frac{1}{x+1} = f(x)$ d'après la question 4 (1 pt).

   — <u>Hérédité :</u> soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x} + (-1)^{n+1} f(n+1+x) = f(x)$. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k+1+x} + (-1)^{n+2} f(n+2+x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2+x} + (-1)^{n+2} f(n+2+x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x} + (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n+2+x} - f(n+2+x) \right) \text{(1 pt)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x} + (-1)^{n+1} f(n+1+x) \text{ d'après la question 4 (1 pt)} \\ &= f(x) \text{ par hypothèse de récurrence (1 pt)} \end{aligned}$$

   La récurrence est donc établie.

   — <u>Conclusion :</u> $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$

   (b) D'après les questions précédentes, quand $n \to +\infty$, $(-1)^{n+1} f(n+1+x) \to 0$ (1 pt). On en déduit que la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k+1+x}$ converge (1 pt) et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x} = f(x)$$

7. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Posons $g : t \mapsto \frac{1}{k+1+t}$. g est dérivable (1 pt) sur $\mathbb{R}_+$ car $(k+1+t)$ ne s'y annule pas(1 pt) , et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $g'(t) = -\frac{1}{(k+1+t)^2}$.

Ainsi, $|g'(t)| = \frac{1}{(k+1+t)^2} \leq \frac{1}{k^2}$ puisque $k+1+t \geq k$ (1 pt).
Ainsi, par inégalité des accroissements finis, (1 pt)

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, |g(x) - g(y)| = \left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| \leq |x-y| \frac{1}{k^2}$$

(b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$. D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| \leq |x-y| \frac{1}{k^2}$$

Or,

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+y} \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right) \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| \text{ par inégalité triangulaire (1 pt)} \\
&\leq \left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} \right| + \sum_{k=1}^{+\infty} |x-y| \frac{1}{k^2} \text{ d'après la question 7a (1 pt)} \\
&\leq \left| \frac{y+1-x-1}{(x+1)(y+1)} \right| + |x-y| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \\
&\leq |x-y| \times \frac{1}{(x+1)(y+1)} + |x-y| \frac{\pi^2}{6} \text{ d'après la valeur admise de la somme des } \frac{1}{k^2} \text{ (1 pt)} \\
&\leq |x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6} \right)
\end{aligned}$$

(1 pt)

(c) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$. $\frac{1}{(x+1)(y+1)} \xrightarrow[y \to x]{} \frac{1}{(x+1)^2}$ donc par produit, $|x-y| \times \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6} \right) \xrightarrow[y \to x]{} 0$. (1 pt)
Ainsi, par théorème des gendarmes (1 pt), $|f(x) - f(y)| \xrightarrow[y \to x]{} 0$ (1 pt) i.e. $f(y) \xrightarrow[y \to x]{} f(x)$ et f est continue en x. Ceci étant vrai pour tout réel x (1 pt), f est continue sur $\mathbb{R}_+$

Partie III : Dérivabilité de f (28 pt)

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k l'application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \geq 0$ par :

$$g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1+x}$$

1. g_k est de classe $\mathcal{C}^2$. (1 pt) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$, $g_k'(t) = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+t)^2}$ (1 pt) donc $g_k''(t) = \frac{2 \times (-1)^{k+2}}{(k+1+t)^3}$ et donc $|g_k''(t)| \leq \frac{2}{k^3}$ (2 pt) Ainsi, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 (1 pt) , pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$|g_k(x) - g_k(y) - (x-y) g_k'(x)| \leq \frac{|x-y|^2}{k^3}$$

2. (a) La série de terme général $\frac{1}{k^3}$ converge comme série de Riemann (1 pt), et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|g_k'(x)| \leq \frac{1}{k^2}$ qui est aussi le terme général d'une série convergente par critère de Riemann, donc la série de terme général $g_k'(x)$ converge absolument. (1 pt)

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, en sommant l'inégalité de la question 1 (1 pt) :

$$\sum_{k=1}^{n} |g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g_k'(x)| \leq |x-y|^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$$

Or, on rappelle que $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$, $f(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(y)$ et on note $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x)$ (toutes les séries ici sont convergentes d'après les questions précédentes)
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} g_k(x) - \sum_{k=0}^{n} g_k(y) - (x-y)\sum_{k=0}^{n} g_k'(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} (g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g_k'(x))\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} |g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g_k'(x)| \text{ par inégalité triangulaire (1 pt)} \\
&\leq |g_0(x) - g_0(y) - (x-y)g_0'(x)| + |x-y|^2 \frac{1}{k^3} \text{(1 pt)}
\end{aligned}$$

On calcule : $|g_0(x) - g_0(y) - (x-y)g_0'(x)| = \frac{(x-y)^2}{(x+1)^2(y+1)}$ (2 pt)
On obtient ainsi pour tout n :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} g_k(x) - \sum_{k=0}^{n} g_k(y) - (x-y)\sum_{k=0}^{n} g_k'(x)\right| \leq (x-y)^2 \left(\frac{1}{(x+1)^2(y+1)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}\right)$$

(2 pt) En passant à la limite, les séries étant convergentes (1 pt) :

$$|f(x) - f(y) - (x-y)S(x)| \leq (x-y)^2 \left(\frac{1}{(x+1)^2(y+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}\right)$$

(1 pt) Finalement, pour $x \neq y$, (1 pt)

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x-y} - S(x)\right| \leq |x-y| \left(\frac{1}{(x+1)^2(y+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}\right)$$

(1 pt) Ainsi, quand $x \to y$, $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \xrightarrow{S} (x)$ (1 pt) : f est dérivable en x (1 pt) et $f'(x) = S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x)$

(c)

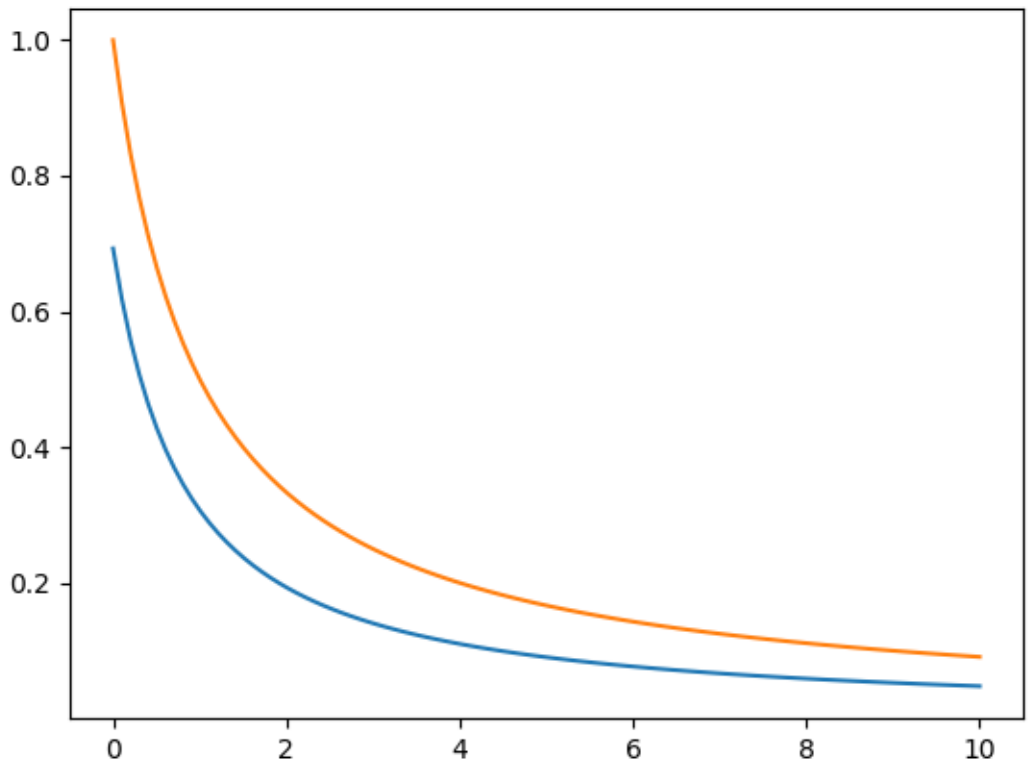
$$\begin{aligned}
f'(0) &= S(0) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(0) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2} \\
&= -\frac{\pi^2}{12} \text{ d'après les questions préliminaires}
\end{aligned}$$

(3 pt)

3. Il faut faire apparaître :
   - $f(0) \simeq 0.69$, $f(0) \simeq 0.31$
   - f est décroissante
   - $f'(0)$ est négative, de valeur absolue un peu inférieure à 1 ($\simeq \frac{10}{12} \simeq \frac{5}{6} \simeq 0.83$)

— f tend vers 0 en $+\infty$
— Éventuellement, on peut tracer la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ pour comparaison

La simulation Python donne :



La courbe bleue est celle de f et la courbe orange est celle de $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ (5 pt)