Feuille d'exercices n°23

Exercice 2 (Inégalité de Bernoulli). Soient $n \geq 2$ et $f : x \mapsto (1+x)^n$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et étudier sa convexité
   f est de classe $\mathcal{C}^2$ car polynômiale. Ainsi, d'après la caractérisation de la convexité pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, il suffit d'étudier le signe de f'' : pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ et donc $f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$ car $n \geq 2$.
   Or, pour $n \geq 2$ et $x \geq -1$, $n(n-1)(1+x)^{n-2} \geq 0$. Ainsi, f est convexe sur $[-1; +\infty[$.
   Le signe de f'' sur $]-\infty; -1[$ dépend de la parité de n : si n est pair, $n-2$ aussi et $(1+x)^{n-2}$ est positif, sinon $(1+x)^{n-2}$ est négatif sur $]-\infty; -1[$ et donc pour n impair, f'' est concave sur cet ensemble.
2. Montrer : pour tout $x \geq -1, (1+x)^n \geq 1 + nx$
   Pour tout entier n, f est convexe sur $[-1; +\infty[$ donc au-dessus de sa tangente en 0. Or, $f(0) = 1$ et $f'(0) = n$, donc l'équation de la tangente à f en 0 est : $y = 1 + nx$.
   On obtient donc : $\forall x \in [-1; +\infty[, f(x) = (1+x)^n \geq 1 + nx$

Exercice 4 (Moyennes arithmétique et géométrique). Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ des réels positifs. Montrer :

$$\sqrt[n]{x_1 \times \ldots \times x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

Si l'un des x_i au moins est nul, l'inégalité est triviale. Supposons donc que tous les x_i sont non nuls.
Puisque la fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient (caractérisation 4 du cours, avec $t_i = \frac{1}{n}$ pour tout entier i) :

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(x_i)$$

En utilisant les propriétés algébriques du logarithme :

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i\right) \geq \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}}\right)$$

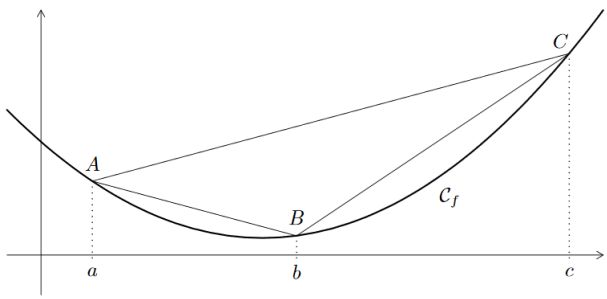
Finalement, par croissance de la fonction exponentielle,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

C'est l'inégalité qu'il fallait démontrer.

♠ **Exercice 5** (Inégalité des pentes). Soient $a < b$ deux réels, $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe *(sans hypothèse de dérivabilité)* et $c \in]a; b[$.

1. Faire un dessin de la situation. On pose $A(a, f(a)), B(b, f(b)), C(c, f(c))$: relier A et B, A et C, B et C. Que dire des pentes des segments ainsi tracés ?



On fait le dessin ci-dessus, en inversant les rôles de b et c (image trouvée sur internet, d'où la convention différente)

2. Montrer :
$$\forall c \in]a;b[, \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$
Soit $c \in]a;b[$.
$c = \frac{c-b}{a-b}a + \left(1 - \frac{c-b}{a-b}\right)b$ donc par convexité de la fonction f :
$$f(c) \leq \frac{c-b}{a-b}f(a) + \left(1 - \frac{c-b}{a-b}\right)f(b)$$
Via des manipulations algébriques (développer, regrouper intelligemment...) on obtient les deux inégalités demandées.

Exercice 6. Montrer que pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$
$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$
En déduire, par exemple, un encadrement de $\cos(1)$
Par théorème de Taylor avec reste intégral à l'ordre 3, pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$:
$$\cos(x) - (1 - \frac{x^2}{2}) = \int_0^x \frac{\cos^{(4)}(t)}{6}(x-t)^3 dt = \int_0^x \cos(t)\frac{(x-t)^3}{6}dt$$
Or : $\forall t \in [0;x], \cos(t) \in [0;1]$ et $(x-t)^3 \geq 0$ donc par croissance de l'intégrale :
$$0 \leq \int_0^x \cos(t)\frac{(x-t)^3}{6} \leq \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} = \left[-\frac{(x-t)^4}{24}\right]_0^x = \frac{x^4}{24}$$
On conclut en ajoutant $1 - \frac{x^2}{2}$ à chaque membre de l'inégalité.
pour $x = 1$ (qui est bien dans l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$: $1 - \frac{x^2}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}$, donc :
$$0,5 \leq \cos(1) \leq 0,55$$
Remarque : la calculatrice donne $\cos(x) \simeq 0,540302$

Exercice 18 (Une étude de suite implicite)**.**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n \in]0;+\infty[$
f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x > 0$, $f_n'(x) = 5x^4 + n > 0$ donc f_n est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ avec $f_n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -1$ et $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Par théorème de la bijection, f_n est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $]-1;+\infty[$ donc il existe un unique réel $u_n = f_n^{-1}(0)$ tel que $f_n(u_n) = 0$
2. En étudiant pour tout n le signe de $f_n(u_{n+1})$, montrer que la suite (u_n) est décroissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$. $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^5 + nu_{n+1} - 1$ Par ailleurs, puisque $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, $u_{n+1}^5 = 1-(n+1)u_{n+1}$. Ainsi :
$$f_n(u_{n+1}) = 1 - (n+1)u_{n+1} + nu_{n+1} - 1 = -u_{n+1} < 0 = f_n(u_n)$$
Par croissance stricte de f_n, on en déduit : $u_{n+1} < u_n$ et donc (u_n) est décroissante.
3. Montrer que (u_n) converge.
(u_n) est positive (question 1) donc minorée par 0 et décroissante : d'après le théorème de la limite monotone, il existe un réel $\ell \geq 0$ tel que $u_n \to \ell$
4. Par l'absurde, montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Supposons par l'absurde $\ell > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^5 = 1 - nu_n$. Or, $u_n^5 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^5$ et par ailleurs $nu_n \to +\infty$, ce qui crée une contradiction.

5. Déduire de la relation $u_n = \frac{1-u_n^5}{n}$:

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

Puisque $u_n \to 0$, $\frac{1-u_n^5}{n} \sim \frac{1}{n}$ et donc $u_n \sim \frac{1}{n}$

6. Montrer :

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

On sait : $u_n = \frac{1-u_n^5}{n} = \frac{1-\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^5}{n} = \frac{1-\frac{1}{n^5}(1+o(1))^5}{n} = \frac{1-\frac{1}{n^5}+o\left(\frac{1}{n^5}\right)}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$

Exercice 19 (Ecricome 2007).

1. A l'aide de développements limités usuels, montrer qu'au voisinage de 0 :

$$\ln(2-e^x) = -x - x^2 + o(x^2)$$

$$\begin{aligned}
\ln(2-e^x) &= \ln(2-(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) \\
&= \ln(1-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)) \\
&= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^2) \\
&= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x^2+o(x^2) \\
&= -x-x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

Remarque : la composition de développements limités n'est plus au programme.

2. (a) Montrer que pour $k \geq 2$: $2-e^{\frac{1}{k}} \in]0;1[$

Soit $k \geq 2$. $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$ et donc $2-e^{\frac{1}{k}} \leq 2-e^{\frac{1}{2}}$. Or, $e^{\frac{1}{2}} > 1$ par croissance de l'exponentielle, d'où $2-e^{\frac{1}{k}} < 1$. Par ailleurs, $2-e^{\frac{1}{k}} \geq 0 \iff e^{\frac{1}{k}} \leq 2 \iff e \leq 2^k$ ce qui est vrai pour $k \geq 2$ puisque $e \simeq 2.7$ et $2^2 = 4$

(b) En déduire le signe de $\ln(2-e^{\frac{1}{k}}$

Puisque ln est négatif sur $]0;1[$, pour tout $k \geq 2$, $\ln\left(2-e^{\frac{1}{k}}\right) < 0$

(c) Pour $n \geq 2$, on pose :

$$V_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(2-e^{\frac{1}{k}}) \text{ et } u_n = \exp(V_n)$$

Déterminer la limite de V_n et de u_n quand $n \to +\infty$

D'après la question 1, $\ln(2-e^{\frac{1}{k}}) \sim -\frac{1}{k}$, et la série de terme général $-\frac{1}{k}$ diverge (série harmonique) donc V_n diverge vers $-\infty$ (puisque les termes sont tous négatifs) et par composition avec l'exponentielle, $u_n \to 0$

3. (a) Montrer :

$$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^{n}\left[\ln(2-e^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
\ln(nu_n) &= \ln(n) + \ln(u_n) \\
&= \ln(n) + V_n \\
&= \ln(n) + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1) + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right) \text{ par télescopage} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - (\ln(k-1) - \ln(k)) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln(2 - e^{\frac{1}{k}} - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)
\end{aligned}$$

(b) Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$

(c) En déduire un équivalent de u_n puis la nature de $\sum u_n$
Toujours d'après le développement limité de la question 1, $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ d'où :

$$\begin{aligned}
\ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) &= -\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \\
&\sim -\frac{1}{2k^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, il existe un réel α tel que $\ln(nu_n) \to \alpha$ i.e. $nu_n \to e^{\alpha}$ par continuité de l'exponentielle, et donc $u_n \sim \frac{e^{\alpha}}{n}$. Par critère de Riemann, la série de terme général u_n diverge.

4. On pose : $S_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k u_k$

(a) Étudier le sens de variation de (u_n)
Soit $n \in \mathbb{N}$.
$V_{n+1} - V_n = \ln(2 - e^{\frac{1}{n+1}}) < 0$ donc (V_n) est décroissante et par croissance de l'exponentielle, (u_n) est décroissante aussi.

(b) Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
On l'a déjà fait en DM et en DS, c'est le thème «séries alternées»
Prenons $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
S_{2(n+1)} &= S_{2n+2} \\
&= S_{2n} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} \\
&= S_{2n} + (u_{2n+2} - u_{2n+1}) \\
&\leq S_{2n} \text{ puisque } u_{2n+2} \leq u_{2n+1}
\end{aligned}$$

De même, $S_{2(n+1)+1} \geq S_{2n+1}$ donc (S_{2n}) est décroissante, (S_{2n+1}) est croissante et $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

(c) En déduire la nature de $\sum (-1)^n u_n$
D'après la question précédente et le théorème des suites adjacentes, S_{2n} et S_{2n+1} ont la même limite S, donc $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} S$ (c'est un résultat du chapitre 5) et donc la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.