Chapitre 24 : Intégration sur un intervalle

Analyse 9

Liens avec d'autres chapitres : il faut savoir manipuler des intégrales sur un segment comme au chapitre 14, mais aussi bien comprendre les liens avec la convergence de séries numériques (chapitre 18 !)

I. Convergence d'une intégrale

1. Définition et premiers exemples sur un intervalle semi-ouvert

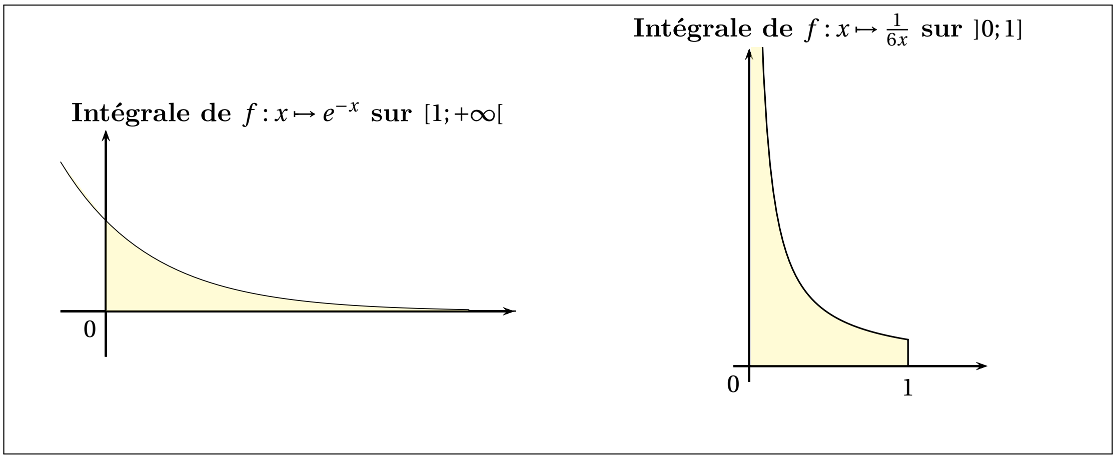
Définition 1.

- On se place sur un intervalle $I = [a;b[$ avec $a < b \leqslant +\infty$, avec f une fonction **continue sur** I. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ **converge** si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand $x \to b$.
- On définira de la même façon une intégrale convergente sur $]a;b]$ si $\int_x^b f(t)dt$ converge quand $x \to a$
- Dans le cas contraire, on dira que l'intégrale **diverge**

Remarque. Par souci de concision, on évoquera tous les théorèmes du cours dans le cas $[a;b[$ seulement. Tous sont transposables au cas $]a;b]$.

Exemple. Convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$

Exemple. Convergence de $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$

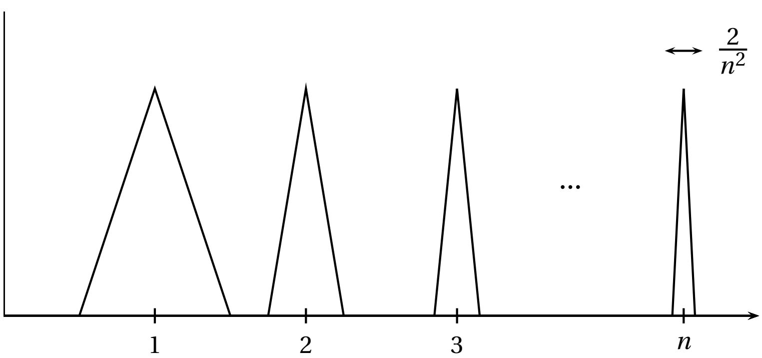


Remarque. Si f est prolongeable par continuité en $\tilde{f}$ sur $[a;b]$, l'intégrale de f sur $[a;b[$ est égale à l'intégrale de $\tilde{f}$ sur $[a;b]$ (chap.14)

Exemple. $\int_0^1 t\ln(t)dt$ est une intégrale **faussement impropre**.

♡ *Remarque.* Contrairement à la convergence des **séries**, $\int_a^b f(t)dt$ converge **n'implique pas** que f tend vers 0 en b (même si $b = +\infty$)

Illustration :



Chaque triangle a une aire $\frac{1}{n^2}$, terme général d'une série convergente.

♣ *Exercice.* Montrer qu'en revanche, si f est positive, que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge **et que f admet une limite ℓ en $+\infty$**, alors $\ell = 0$

Propriété 2 (Extension des propriétés usuelles)**.** Si f, g sont définies sur $[a;b[$ (avec $a < b$) et que $\int_a^b f(t)dt, \int_a^b g(t)dt$ convergent, les propriétés usuelles des intégrales restent valables :

1. **linéarité :** pour tous réels λ, μ, $\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)dt$ converge et $\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$
2. **relation de Chasles :** pour tout $c \in [a;b[$, $\int_c^b f(t)dt$ converge et $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$
3. **positivité :** si f est positive sur $[a;b[$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$
4. **croissance :** si $f \geqslant g$ sur $[a;b[$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant \int_a^b g(t)dt$

♣ *Démonstration.* En appliquant les propriétés usuelles des intégrales sur $[a;x]$ puis passage à la limite.

Remarque. Pour la relation de Chasles, c'est en fait une équivalence, pour tout $c \in]a;b[$, $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_c^b f(t)dt$ converge.

Propriété 3 (Cas particulier !)**.** Si f est positive et non constante égale à 0 sur $[a;b[$, alors $\int_a^b f(t)dt > 0$

Démonstration. En utilisant la version ε de la continuité

Remarque. On retient surtout la contraposée : ....
....

2. Extension aux intervalles ouverts, autres points problématiques

Définition 4. Soient $a < c < b$ trois réels.

- Soit $f \in \mathscr{C}^0(]a;b[)$. On dira que $\int_a^b f(t)dt$ converge si $\int_a^c f(t)dt$ **et** $\int_c^b f(t)dt$ convergent et on notera alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Du fait de la relation de Chasles, cette définition ne dépend pas du choix de c

- Soit $f \in \mathscr{C}^0([a;c[\cup]c;b])$.On dira que $\int_a^b f(t)dt$ converge si $\int_a^c f(t)dt$ **et** $\int_c^b f(t)dt$ convergent et on notera alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Exemple. Étudier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx$, de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

Remarque. Sur le cas des fonctions paires et des fonctions impaires.

♡ **Rédaction :** justifier sur quel intervalle la fonction est continue **puis** étudier les points problématiques (points de discontinuité, bornes infinies)

3. Intégrales de référence

♡ **Propriété 5** (Intégrales de Riemann)**.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f :]0;+\infty[$ définie par $f(t) = t^\alpha$

- $\int_0^1 f(t)dt$ converge si, et seulement si, $\alpha > -1$
- $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge si, et seulement si, $\alpha < -1$

Démonstration. Directement avec une primitive.

Remarque.
- Le cas $\int_0^1 f(t)dt$ n'est véritablement intéressant que pour $\alpha < 0$.
- Le cas «$\int_1^{+\infty}$» est un analogue direct des séries de Riemann (cf. preuve par comparaison série-intégrale).
- Savoir aussi écrire le critère sous la forme $\int_a^b \frac{1}{t^\alpha}dt$ ou $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}dt$

Exemples (Convergentes ?)**.** Pour chacune des intégrales suivantes, si elle converge, déterminer sa valeur.

- $\int_0^2 -\frac{1}{t\sqrt{t}}dt$
- $\int_1^2 \frac{1}{(t-2)^2}dt$
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2\alpha+1}}dt, \alpha \in \mathbb{R}$

Exemple. Étudier la convergence de $\int_{-1}^{1} f(t)dt$ où

$$f : t \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Propriété 6 (Variante ailleurs qu'en 0)**.** Si $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$, alors $\int_a^b (t-a)^\alpha dt$ converge si et seulement si $\alpha > -1$

Propriété 7 (Exponentielles)**.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt \text{ converge si et seulement si } \alpha > 0$$

On a alors : $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$

Démonstration.

Exemple. $\int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}$

II. Théorèmes de convergence

1. Cas des fonctions positives

Propriété 8. Soit f une fonction positive sur $[a; b[$

$$\int_a^b f(t)dt \text{ converge si et seulement si } x \mapsto \int_a^x f(t)dt \text{ est majorée}$$

Démonstration. C'est une conséquence du théorème de la limite monotone.

Théorème 9 (Admis)**.** Soient f, g deux fonctions définies sur un intervalle $[a; b[$ avec $a < b \leqslant +\infty$ toutes deux **positives**.

1. Si $f \leqslant g$ et $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge. Si $f \leqslant g$ et $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.
2. Si $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$, alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature
3. Si $f(x) \underset{x \to b}{=} o(g(x))$, alors
   - Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge
   - Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Remarque. Les théorèmes équivalents existent au voisinage de a, et existent pour des fonctions **négatives** au voisinage de b. Ces théorèmes sont analogues aux théorèmes concernant les **séries à termes positifs**.

♡ *Remarque.* Souvent, on multipliera par un x^α pour vérifier la convergence (par exemple par $x^{\frac{3}{2}}$ pour une convergence en $+\infty$)

Exemples. $\int_1^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{x}\right) dx$ diverge, $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ converge.

Exercice. Étudier la convergence de $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}(1-t)}$

2. Convergence absolue : intégrabilité

Définition 10. On dit d'une foncton f qu'elle est **intégrable** sur $[a;b[$, ou que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ **converge absolument** si :

$$\int_a^b |f(t)|dt \text{ converge}$$

Propriété 11 (Convergence absolue implique convergence, inégalité triangulaire intégrale)**.** Si $\int_a^b f(t)dt$ converge **absolument**, alors :

- $\int_a^b f(t)dt$ converge
- $|\int_a^b f(t)dt| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$

Démonstration. Comme pour les suites : $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$

Méthode : pour étudier l'intégrale d'une fonction qui change de signe, étudier l'intégrande en valeur absolue. On a alors l'intégrale d'une fonction **positive** pour laquelle on peut raisonner en majorant ou en trouvant un équivalent, par exemple.

Exemple. Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} x(\sin(x))e^{-x}dx$

Exercice. Étudier la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^3}dx$

III. Techniques de calcul sur un intervalle quelconque

Objectif : étendre les techniques de calcul par changement de variable et par intégration par parties aux intégrales sur un ensemble quelconque. Jusqu'ici, on ne s'est intéressé qu'à l'existence ou non d'une intégrale, on s'intéresse maintenant à sa valeur.

1. Intégration par parties

Remarque. Aucun résultat théorique n'est au programme. Pour effectuer une intégration par parties dans le cadre d'une intégrale impropre, la faire sur un segment puis passer à la limite.

♡ **Exemple.** $\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$: étudier la convergence et, dans le cas convergent, la valeur de cette intégrale.

Exercice. Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx$

2. Changement de variable

Remarque. On peut aussi réaliser un changement de variable sur un segment puis passer à la limite, ou utiliser le :

♡ **Théorème 12** (Changement de variable)**.** Soit f une fonction continue sur $]a;b[$ et ϕ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, **monotone et bijective** de $]\alpha;\beta[$ dans $]a;b[$. Les intégrales $\int_a^b f(u)du$ et $\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$ sont de même nature et en cas de convergence :

$$\int_a^b f(u)du = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))|\phi'(t)|dt$$

Démonstration.

Remarque. Ce résultat s'adapte si l'intégrale est impropre en a ou b seulement. La valeur absolue permet de compenser l'interversion des bornes d'intégration lorsque ϕ est décroissante.

En pratique, on posera comme d'habitude $u = \phi(t)$, $du = \phi'(t)dt$ et on intervertira les bornes en cas de besoin.

Exemple. Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}dt$ converge, puis en calculer la valeur en posant $u = \sqrt{1-t}$

Exemple. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ converge, puis en posant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = 0$. En déduire, pour tout réel a, la valeur de $I_a = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}dt$