Devoir Maison n°19 - Formule de Stirling

RAPPEL : INTÉGRALES DE WALLIS

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt$

1. Calculer W_0 et W_1
 $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) = 1$
2. (a) Montrer que la suite (W_n) est décroissante.
 Pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \cos(t) \leq 1$ donc en multipliant par $\cos(t)^n$ qui est positif : $\cos(t)^{n+1} \leq \cos(t)^n$ et $W_{n+1} \leq W_n$ par croissance de l'intégrale. Ainsi, (W_n) est une suite décroissante.
- (b) Montrer, pour tout entier $n \geq 0$: $W_n > 0$
 $t \mapsto \cos(t)^n$ est une fonction continue, positive, non nulle (par exemple $\cos(0) = 1$) donc $W_n > 0$
3. (a) Montrer, pour tout entier $n \geq 0$: $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$
 En intégrant par parties :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \times \cos(t)^{n+1} dt \\ &= [\sin(t) \cos^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \times (n+1) \sin(t) \cos^n(t) dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t)) \cos^n(t) dt \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \end{aligned}$$

On en déduit : $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$

- (b) En déduire pour tout entier $n \geq 0$: $(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0$
 En multipliant par W_{n+1} : $(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+1)W_nW_{n+1}$ donc la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)$ est constante et égale à son premier terme $W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$
4. (a) Montrer, pour tout entier $n \geq 0$: $W_n \geq W_{n+1} \geq \frac{n+1}{n+2}W_n$
 Puisque (W_n) est décroissante, pour tout $n \geq 0$, $W_n \geq W_{n+1} \geq W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$
- (b) En déduire : $W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n$ puis : $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$
 En divisant par W_n (qui est strictement positif), $1 \geq \frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{n+1}{n+2}$. Puisque $\frac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$, par théorème des gendarmes, $W_{n+1} \sim W_n$
 Ainsi, $(n+1)W_{n+1}W_n \sim nW_n^2$ donc $\frac{\pi}{2} \sim nW_n^2$ et donc $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$
5. Montrer pour tout entier $n \geq 0$:

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2} \frac{\pi}{2}$$

Par récurrence (et beaucoup de calcul).

LA FORMULE DE STIRLING

On note pour tout entier $n \geq 1$: $A_n = \frac{1}{n!} n^n e^{-n} \sqrt{n}$ et pour tout entier $n \geq 2$: $a_n = -1 - (n - \frac{1}{2}) \ln(1 - \frac{1}{n})$

1. En utilisant un développement limité, montrer que a_n est le terme général d'une série convergente.

$$\begin{aligned} a_n &= -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -1 + \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $a_n \sim \frac{1}{12n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente par critère de Riemann : $\sum a_n$ converge.

2. Montrer pour tout entier $n \geq 2$:

$$a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$$

Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} \ln(A_n) - \ln(A_{n-1}) &= \ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}(n-1)!}{n!(n-1)^{n-1} e^{-(n-1)} \sqrt{n-1}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n \times n^{n-1}}{n e (n-1)^{n-1}} \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{e}\right) - (n-1) \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= a_n \end{aligned}$$

3. En déduire que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite ℓ est strictement positive.

Puisque la série de terme général a_n converge, par télescopage la série de terme général $\ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$ converge et est égale à $\ln(A_n) - \ln(A_0) = \ln(A_n)$. Il existe donc un réel ℓ' tel que $\ln(A_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell'$ et par continuité de l'exponentielle :

$$A_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{\ell'} > 0$$

4. (a) Justifier : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}$

Puisque $A_n \rightarrow \ell$, $\frac{1}{n!} n^n e^{-n} \sqrt{n} \sim \ell$ i.e.

$$n! \sim \frac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}$$

(b) En utilisant l'expression de W_{2n} à l'aide de factorielles, en déduire la valeur de ℓ et l'équivalent suivant :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

D'après les résultats sur les intégrales de Wallis, on sait :

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \frac{\pi}{2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

Or, $n! \sim n^n e^{-n} \ell \sqrt{n}$ et $(2n)! \sim (2n)^{2n} e^{-2n} \ell \sqrt{2n}$ Alors :

$$\frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \ell \sqrt{2n} \pi}{2^{2n} n^{2n} e^{-2n} \ell^2 n} \frac{\pi}{2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

i.e. :

$$\frac{\sqrt{2} \pi}{\ell \sqrt{n} 2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

Alors :

$$\frac{\pi \sqrt{2}}{2\ell} = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

i.e.

$$\ell = \sqrt{2\pi}$$

D'où le résultat annoncé.

APPLICATION I (EML 2012)

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . On effectue dans l'urne des tirages avec remise. On suppose que tous les tirages sont équiprobables. On s'arrête dès que l'on obtient une boule déjà obtenue. On note T_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Justifier : $\mathbb{P}(T_n > n + 1) = 0$ Puisqu'il y a n boules différentes, à partir de $n + 1$ tirages, on a nécessairement tiré au moins une fois 2 fois la même boule. On en déduit que $T_n \leq n + 1$ i.e. $\mathbb{P}(T_n > n + 1) = 0$
2. Déterminer pour tout entier $k \leq n$: $\mathbb{P}(T_n > k)$
 $T_n > k$ correspond à l'événement : «les k premiers tirages donnent k boules différentes». Il y a $\frac{n-1}{n}$ chances que la deuxième boule soit différente de la première, $\frac{n-2}{n}$ pour la troisième, et ainsi de suite :

$$\mathbb{P}(T_n > k) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \dots \times \frac{n-(k-1)}{n} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!n^{k-1}}$$

3. On définit $Y_n = \frac{T_n}{\sqrt{n}}$ et on cherche à étudier le comportement asymptotique de (Y_n) . Soit $y \in [0; +\infty[$ et $k_n = \lfloor y\sqrt{n} \rfloor$

- (a) Rappeler l'inégalité qui caractérise la partie entière et montrer : $k_n^2 \sim ny^2$

Par définition de la partie entière,

$$y\sqrt{n} - 1 < k_n \leq y\sqrt{n}$$

Par stricte croissance de la partie entière,

$$ny^2 - 2y\sqrt{n} + 1 < k_n^2 \leq ny^2$$

Puisque $ny^2 - 2y\sqrt{n} + 1 \sim ny^2$ quand $n \rightarrow +\infty$, alors $k_n^2 \sim ny^2$

- (b) Justifier : $\mathbb{P}(Y_n > y) = \mathbb{P}(T_n > k_n)$

$$\mathbb{P}(Y_n > y) = \mathbb{P}\left(\frac{T_n}{\sqrt{n}} > y\right) = \mathbb{P}(T_n > \sqrt{ny}) \text{ Puisque } T_n \text{ est à valeurs entières, } T_n > \sqrt{ny} \iff T_n > \lfloor \sqrt{ny} \rfloor \iff T_n > k_n$$

On en déduit : $\mathbb{P}(Y_n > y) = \mathbb{P}(T_n > k_n)$

- (c) En utilisant la formule de Stirling, montrer :

$$\mathbb{P}(Y_n > y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-k_n} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}$$

D'après la question b, $\mathbb{P}(Y_n > y) = \mathbb{P}(T_n > k_n)$. D'après la question 2, $\mathbb{P}(T_n > k_n) = \frac{(n-1)!}{(n-k_n)!n^{k_n-1}}$

En utilisant la formule de Stirling : $(n-1)! \sim (n-1)^{n-1} e^{-n+1} \sqrt{2\pi(n-1)} \sim (n-1)^{n-1} e^{-n+1} \sqrt{2\pi n}$ et $(n-k_n)! \sim (n-k_n)^{n-k_n} e^{-n+k_n} \sqrt{2\pi(n-k_n)}$

Recombinons tous les éléments :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_n > y) &\sim \frac{(n-1)^{n-1} e^{-n+1} \sqrt{2\pi n}}{(n-k_n)^{n-k_n} e^{-n+k_n} \sqrt{2\pi(n-k_n)} n^{k_n-1}} \\ &\sim e^{-k_n} \times e \times \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi n}} \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-k_n)^{n-k_n} n^{k_n-1}} \text{ car } k_n = o(n) \\ &\sim e^{-k_n} \times e \times \left(\frac{n-1}{n-k_n}\right)^{n-k_n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k_n-1} \\ &\sim e^{-k_n} \times e \times \left(\frac{n-k_n}{n}\right)^{k_n-n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\ &\sim e^{-k_n} \times e \times \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)^{k_n-n} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \text{ car } 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1 \\ &\sim e^{-k_n} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)^{k_n-n} \text{ car } \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e^{-1} \end{aligned}$$

- (d) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $t \mapsto -t + (t-1) \ln(1-t)$

$$\begin{aligned} -t + (t-1) \ln(1-t) &= -t + (t-1) \left(-t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) \\ &= -t - t^2 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \\ &= -\frac{t^2}{2} + o(t^2) \end{aligned}$$

(e) En déduire :

$$-k_n + (k_n - n) \ln \left(1 - \frac{k_n}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{y^2}{2}$$

Au vu de la forme de l'expression à étudier, on va appliquer le résultat de la question précédente à $\frac{k_n}{n}$, qui tend vers 0 :

$$-\frac{k_n}{n} + \left(\frac{k_n}{n} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{k_n}{n} \right) = -\frac{k_n^2}{2n^2} + o\left(\frac{k_n^2}{n^2}\right)$$

Multiplions par n à gauche et à droite de l'égalité :

$$-k_n + (k_n - n) \ln \left(1 - \frac{k_n}{n} \right) = -\frac{k_n^2}{n} + o\left(\frac{k_n^2}{n}\right)$$

Or, d'après la question a, $k_n^2 \sim ny^2$. On trouve donc :

$$-k_n + (k_n - n) \ln \left(1 - \frac{k_n}{n} \right) \sim -\frac{k_n^2}{n} \sim -\frac{ny^2}{n} \sim -\frac{y^2}{2}$$

i.e.

$$-k_n + (k_n - n) \ln \left(1 - \frac{k_n}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{y^2}{2}$$

(f) Donner la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\mathbb{P}(Y_n > y)$

$$\mathbb{P}(Y_n > y) \sim e^{-k_n} \left(1 - \frac{k_n}{n} \right)^{k_n - n} = e^{-k_n} \times \exp\left((k_n - n) \ln \left(1 - \frac{k_n}{n} \right)\right) = \exp\left(-k_n + (k_n - n) \ln \left(1 - \frac{k_n}{n} \right)\right)$$

D'après la question précédente et par continuité de l'exponentielle, $\mathbb{P}(Y_n > y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}$

On a ici déterminé la limite de la fonction de répartition, ce qu'on appelle **convergence en loi** de la suite (Y_n) . La loi limite n'est pas une variable aléatoire discrète.

APPLICATION 2 (CCMP PSI 2024)

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n : \Omega \rightarrow \{-1; 1\})_{n \in \mathbb{N}}$ mutuellement indépendantes et centrées (i.e. $\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

1. Quelle est la loi de $\frac{1+X_n}{2}$?

$$\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n + 1 = 0) = \mathbb{P}\left(\frac{1+X_n}{2} = 0\right) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n + 1 = 2) = \mathbb{P}\left(\frac{1+X_n}{2} = 1\right) = \frac{1}{2}$$

Ainsi, $\frac{1+X_n}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$

2. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note A_i l'événement $(S_{2i} = 0)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note N_n le nombre d'indices $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que A_i soit vérifié.

(a) Supposons que pour une issue ω , les premiers termes de la suite $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ soient : $-1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, -1$. Que vaut $N_5(\omega)$?

$$\text{Pour } i = 1, S_2 = X_1 + X_2 = -1 + 1 = 0$$

$$\text{Pour } i = 2, S_4 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = -1 + 1 + 1 + 1 = 2$$

$$\text{Pour } i = 3, S_6 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = -1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

$$\text{Pour } i = 4, S_8 = X_1 + \dots + X_8 = 0$$

$$\text{Pour } i = 5, S_{10} = X_1 + \dots + X_{10} = -2$$

On a donc $S_{2i} = 0$ pour $i = 1, 3, 4$ et donc $N_5(\omega) = 3$

(b) On pose pour tout i une variable aléatoire Y_i qui vaut 1 quand A_i est réalisé et 0 sinon. Exprimer N_n en fonction des variables aléatoires (Y_i)

$$N_n = \sum_{i=1}^n Y_i$$

(c) Calculer $\mathbb{P}(A_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

L'événement A_i est réalisé si parmi les $2i$ premières valeurs de la suite $(X_n(\omega))$, il y a i valeurs 1 et i valeurs -1 . Puisqu'il y a une probabilité $\frac{1}{2}$ pour chacune de ces valeurs, d'après l'expression de la loi binômiale, on obtient :

$$\mathbb{P}(A_i) = \binom{2i}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\binom{2i}{i}}{4^i}$$

(d) En déduire que N_n admet une espérance finie :

$$E(N_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\binom{2i}{i}}{4^i}$$

N_n est à valeurs dans $[[1; n]]$ donc admet une espérance. Par ailleurs, $N_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ donc par linéarité $E(N_n) = \sum_{k=1}^n E(Y_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^n \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}$ d'après la question précédente, Y_k suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A_k)$

(e) Soit $\ell \in \mathbb{Z}$ un entier et $n \geq 1$ un entier. En distinguant selon la parité de $\ell - n$, calculer $\mathbb{P}(S_n = \ell)$

Raisonnons par disjonction de cas :

- Si $\ell - n$ est impair, $\mathbb{P}(S_n = \ell) = 0$ puisque S_n est toujours de même parité que n
- Si $\ell - n$ est pair, notons P_n le nombre de 1 et M_n le nombre de -1 (j'ai choisi P et M comme plus et moins) dans la séquence $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$
 $P_n + M_n = n$ et $P_n - M_n = S_n$ donc : $P_n = \frac{S_n + n}{2}$
 On en déduit : $\mathbb{P}(S_n = \ell) = \mathbb{P}(P_n = \frac{\ell + n}{2})$
 Or, P_n suit une loi binômiale de paramètres $2n$ et $\frac{1}{2}$:

$$\mathbb{P}(P_n = \frac{\ell + n}{2}) = \binom{2n}{\frac{\ell + n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3. On admet sans démonstration le résultat suivant :

Théorème. Soient $(a_n), (b_n)$ deux suites de réels non nuls avec $a_n \sim b_n$ et $\sum |b_n|$ divergente. Alors,

$$\sum_{k=1}^n a_k \sim \sum_{k=1}^n |b_k|$$

En déduire l'équivalent :

$$E(N_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}$$

Étudions la série de terme général $a_i = \frac{\binom{2i}{i}}{4^i}$: $a_i = \frac{(2i)!}{i!^2 4^i} \sim \frac{(2i)^{2i} e^{-2i} \sqrt{4\pi i}}{i^i i^i e^{-i} e^{-i} \sqrt{2\pi i} \sqrt{2\pi i} 4^i} \sim \frac{2\sqrt{\pi} \sqrt{i}}{2\pi i} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi i}}$ après simplifications.

Or, la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{\pi i}}$ diverge par critère de Riemann. On peut donc appliquer le théorème précédent et dire que la série de terme général a_i diverge avec :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\binom{2i}{i}}{4^i} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi i}}$$

Pour conclure, faisons apparaître une somme de Riemann dans la dernière écriture :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi i}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{i}{n}}} \sqrt{n}$$

$$\text{Or, } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{i}{n}}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_0^1 = 2 - 0 = 2$$

Remarque : au moment du DM, nous n'avions pas vu les intégrales impropres et il n'était donc pas demandé de justifier que l'intégrale impropre convergeait, ni de la calculer proprement en se ramenant à une intégrale « partielle »...

$$\text{Ainsi, } E(N_n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n} \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{i}{n}}} \sim \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$