

Feuille d'exercices n°24

Exercice 5. Justifier la convergence puis calculer la valeur de l'intégrale suivante : $\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}} dt$.

On posera $u = \sqrt{t}$, puis on pourra intégrer par parties.

Posons $u = \sqrt{t}$, i.e. $t = u^2$ et $dt = 2u du$. La fonction $\sqrt{\cdot}$ effectuant une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} 2u du$ converge.

Or, $u \mapsto 2u^3 e^{-u}$ est une fonction continue sur $[0; +\infty[$ et en $+\infty$, $2u^3 e^{-u} \rightarrow 0$, i.e. $2u^3 e^{-u} = o\left(\frac{1}{u^2}\right)$

On en déduit que l'intégrale est convergente. Calculons maintenant sa valeur en intégrant par parties.

Soit $X > 0$.

$\int_0^X 2u^3 e^{-u} du = [-2u^3 e^{-u}]_0^X + \int_0^X 6u^2 e^{-u} du$ donc quand $X \rightarrow +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} 2u^3 e^{-u} du = \int_0^{+\infty} 6u^2 e^{-u} du$$

Recommençons : $\int_0^X 6u^2 e^{-u} du = [-6u^2 e^{-u}]_0^X + \int_0^X 12u e^{-u} du$ et quand $X \rightarrow +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} 2u^3 e^{-u} du = \int_0^{+\infty} 12u e^{-u} du$$

Une dernière fois :

$$\int_0^{+\infty} 12u e^{-u} du = \int_0^{+\infty} 12 e^{-u} du = 12 \times 1$$

On en déduit : $\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}} dt = 12$

Exercice 6. 1. En effectuant le changement de variable défini par $u = \sqrt{t}$, déterminer une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f : t \mapsto \cos(\sqrt{t})$

Une primitive de f est $F : x \mapsto \int_0^x \cos(\sqrt{t}) dt$. Cherchons une expression explicite de F .

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F(x) = \int_0^x \cos(\sqrt{t}) dt = \int_0^{\sqrt{x}} \cos(x) 2x dx$$

En intégrant par parties :

$$F(x) = [2t \sin(t)]_0^{\sqrt{x}} - \int_0^{\sqrt{x}} 2 \sin(t) dt = 2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + 2 [\cos(t)]_0^{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + 2 \cos(\sqrt{x}) - 2$$

Une primitive de f est donc $x \mapsto 2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + 2 \cos(\sqrt{x})$

2. Déterminer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et en cas de convergence déterminer sa valeur.

Au vu de la question précédente, l'intégrale est divergente puisque $F(x)$ n'a pas de limite quand $x \rightarrow +\infty$.

3. Mêmes questions pour $f : t \mapsto \frac{1}{1+e^t}$

De même, prenons un réel x et étudions :

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+e^t} = \int_1^{e^x} \frac{du}{u(1+u)} = \int_1^{e^x} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = [\ln(u) - \ln(u+1)]_1^{e^x} = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + \ln(2)$$

Une primitive est donc : $x \mapsto \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + \ln(2) = -\ln(1+e^{-x}) + \ln(2)$

Or, quand $x \mapsto +\infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$ et donc $-\ln(1+e^{-x}) + \ln(2) \rightarrow \ln(2)$

L'intégrale converge et vaut $\ln(2)$

Exercice 9. On note $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt$

1. Montrer que I et J sont des intégrales convergentes.

$t \mapsto \ln(\sin(t))$ est une fonction continue sur $]0; \frac{\pi}{2}[$. En 0, $\ln(\sin(t)) = \ln(t + o(t)) = \ln(t(1 + o(1))) = \ln(t) + \ln(1 + o(1)) \sim \ln(t)$ qui est une fonction intégrable autour de 0.

$t \mapsto \ln(\cos(t))$ est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}[$. Posons $u = \frac{\pi}{2} - t$, qui tend vers 0 quand t tend vers $\frac{\pi}{2}$. Alors,

$$\ln(\cos(t)) = \ln(\cos(\frac{\pi}{2} - u)) = \ln(\sin(u))$$

On est ramenés à la situation précédente et l'intégrale converge.

-
2. En utilisant le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, montrer que $I = J$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right) (-du) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(u)) du \\ &= J \end{aligned}$$

3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin(t) \cos(t) = \frac{1}{2} \sin(2t)$. En déduire : $I + J = -\frac{\pi}{2} \ln(2) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt$
Soit $t \in \mathbb{R}$. En utilisant les formules d'addition en trigonométrie :

$$\sin(2t) = \sin(t + t) = \sin(t) \cos(t) + \sin(t) \cos(t) = 2 \sin(t) \cos(t)$$

Il suffit ensuite de diviser l'égalité par 2.

On en déduit :

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin(t)) + \ln(\cos(t))) dt \text{ par linéarité} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t) \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2} \sin(2t)\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) - \ln(2) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt - \frac{\pi}{2} \ln(2) \text{ par linéarité.} \end{aligned}$$

4. Montrer : $2I = -\frac{\pi}{2} \ln(2) + I$ puis conclure avec la valeur de I .

D'après les questions précédentes, $2I = I + J = -\frac{\pi}{2} \ln(2) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt$

Il suffit donc de montrer : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt = I$. Posons donc le changement de variable : $u = 2t$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt &= \int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) \times \frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u)) du + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u)) du \text{ par relation de Chasles} \\ &= \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t + \frac{\pi}{2})) dt \text{ en posant } u = \frac{\pi}{2} + t \\ &= \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} (I + J) \\ &= I \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité demandée puis : $I = -\frac{\pi}{2} \ln(2)$

Exercice 10 (Un résultat théorique : lemme de Riemann-Lebesgue).

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable.

1. En intégrant par parties, montrer que pour tout $A > 0$, $\int_0^A f(t) \cos(xt) dt$ tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$.
Soit $A > 0$.

Puisque f est supposée de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, on peut intégrer par parties :

$$\int_0^A f(t) \cos(xt) dt = \left[\frac{1}{x} f(t) \sin(xt) \right]_0^A - \int_0^A \frac{1}{x} f'(t) \sin(xt) dt = \frac{1}{x} f(A) \sin(Ax) - \int_0^A \frac{1}{x} f'(t) \sin(xt) dt$$

Puisque la fonction $\sin$ est bornée, $\frac{1}{x} f(A) \sin(Ax) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Par ailleurs,

$$\left| \int_0^A \frac{1}{x} f'(t) \sin(xt) dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^A |f'(t)| dt$$

Puisque $\int_0^A |f'(t)| dt$ est un nombre (ne dépend pas de x), $\frac{1}{x} \int_0^A |f'(t)| dt$ tend aussi vers 0 et donc :

$$\int_0^A f(t) \cos(xt) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

2. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

On pourra revenir à la définition de la limite avec un ε et trouver un A tel que $\int_A^{+\infty} |f(t)| dt < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition de la limite, il existe un réel x_0 tel que pour tout $x \geq x_0$, $\left| \int_0^A f(t) \cos(xt) dt \right| \leq \varepsilon$

Par ailleurs, puisque $\int_0^A |f(t)| dt \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} |f(t)| dt$, il existe un A_0 tel que pour tout $A \geq A_0$,

$\int_A^{+\infty} |f(t)| dt \leq \varepsilon$. Soit donc $A \geq A_0$.

Par relation de Chasles, pour $x \geq x_0$,

$$\int_0^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt = \int_0^A f(t) \cos(xt) dt + \int_A^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt$$

Par inégalité triangulaire,

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt \right| \leq \left| \int_0^A f(t) \cos(xt) dt \right| + \int_A^{+\infty} |f(t)| dt \leq 2\varepsilon$$

2ε étant aussi arbitraire que ε , on en déduit que $\int_0^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Exercice 11 (Une intégrale convergente mais pas absolument convergente : l'intégrale de Dirichlet).

L'objectif de cet exercice est de montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente mais pas absolument convergente. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$, appelée **sinus cardinal**, est continue sur $]0; +\infty[$, étudions donc son comportement aux bornes de $\mathbb{R}_+$.

1. **Étude sur $]0; 1]$.** Justifier que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

En 0, $\frac{\sin(t)}{t} \sim 1$, l'intégrale est faussement impropre.

2. **Étude sur $[1; +\infty[$** Posons $x \geq 1$ et étudions $F(x) = \int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt$

(a) Montrer : $F(x) = -\frac{\cos(x)}{x} + \cos(1) + \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$

En intégrant par parties, on obtient : $F(x) = \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt = -\frac{\cos(x)}{x} + \cos(1) + \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$

- (b) En déduire que F converge quand x tend vers $+\infty$ puis que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est une intégrale convergente.

Puisque la fonction $\cos$ est bornée, $\frac{\cos(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Par ailleurs, $\left| \frac{\cos(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ et donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ est absolument convergente. On en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est une intégrale convergente.

3. Non intégrabilité.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [(n-1)\pi; n\pi]$. Justifier :

$$\frac{|\sin(t)|}{t} \geq \frac{|\sin(t)|}{n\pi}$$

Par décroissance de la fonction inverse, $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{n\pi}$ et on multiplie ensuite par un réel positif.

(b) En déduire : $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \geq \frac{2}{n\pi}$

Par croissance de l'intégrale,

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \geq \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{n\pi} dt = \frac{1}{n\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin(t)| dt$$

Par π -périodicité de la fonction $t \mapsto |\sin(t)|$, $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin(t)| dt = \int_0^\pi |\sin(t)| dt = \int_0^\pi \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^\pi = 2$

On obtient donc : $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \geq \frac{2}{n\pi}$

(c) En utilisant la série de terme général $\frac{2}{n\pi}$, justifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ diverge.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $n = \lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor$

$$\int_0^x \frac{|\sin(t)|}{t} dt = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt + \int_{n\pi}^x \frac{|\sin(t)|}{t} dt \geq \sum_{k=1}^n \frac{2}{k\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

En effet, on reconnaît une somme partielle de la série harmonique.

Pour aller plus loin : vous trouverez <https://www.bibmath.net/ressources/justeunexo.php?id=1651> sur Bibmath un exercice permettant de déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$