
Feuille d'exercices Hors série n°1 : Inégalités et encadrements

Exercice 14 (Propriétés abstraites des fonctions convexes). Montrer que si f, g sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ convexes et que g est croissante, alors $g \circ f$ est convexe.

Bonus : trouver un contre exemple pour le cas où g est décroissante.

Soient f, g des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ telles que g soit croissante. Alors, $g \circ f$ est bien défini et pour tous $x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in [0; 1]$, par **convexité de f** ,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

En appliquant la fonction g (croissante) à l'inégalité :

$$g(f(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq g(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y))$$

Dans le second membre de l'inégalité, on peut utiliser le fait que g soit convexe pour écrire :

$$g(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) \leq \lambda g(f(x)) + (1 - \lambda)g(f(y))$$

Finalement :

$$(g \circ f)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda(g \circ f)(x) + (1 - \lambda)(g \circ f)(y)$$

C'est-à-dire que $g \circ f$ est convexe.

Intéressons-nous maintenant au cas où g est décroissante. On va chercher une solution où f et g sont de la forme $f : x \mapsto x^\alpha$ et $g : x \mapsto x^\beta$, avec α et β réels. Cherchons des valeurs de α et β pertinentes :

1. f est convexe si et seulement si $\alpha \geq 1$ ou $\alpha \leq 0$
2. g est convexe si et seulement si $\beta \geq 1$ ou $\beta \leq 0$
3. g est décroissante si et seulement si $\beta \leq 0$
4. $g \circ f : x \mapsto x^{\alpha\beta}$ n'est pas décroissante si $\alpha \times \beta \in]0; 1[$

On va donc prendre $\beta \leq 0, \alpha \leq 0$ tels que $\alpha\beta \in]0; 1[$, par exemple : $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ qui donnent f, g convexes et $g \circ f : x \mapsto (x^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2})} = x^{\frac{1}{4}}$. $g \circ f$ n'est pas convexe.

Exercice 15 (Inégalité de Jensen - un lien avec les probabilités).

1. Compléter l'encadré :

$$f \text{ est convexe sur } I \iff \left(\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \sum_{k=1}^n t_k = 1 \Rightarrow \boxed{f(\dots) \leq \dots} \right)$$

$$f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n t_k f(x_k)$$

2. Soit n un entier et X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Soit f une fonction convexe. Montrer :

$$f(E(X)) \leq E(f(X))$$

Puisque X est une variable aléatoire, $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = x_k) = 1$, avec chacun des $\mathbb{P}(X = x_k)$ qui est un réel positif. Posons pour tout $k \in [1; n]$: $t_k = \mathbb{P}(X = x_k)$. Les t_k sont donc des réels positifs dont la somme vaut 1. Or, par définition,

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{k=1}^n t_k x_k$$

Par théorème de transfert,

$$E(f(X)) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{k=1}^n t_k f(x_k)$$

On en déduit donc par la caractérisation de la convexité donnée à la question précédente :

$$f(E(X)) = f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n t_k f(x_k) = E(f(X))$$



Exercice 18. Faire une analyse similaire de la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4 - \frac{1}{4} \ln(u_n)$

On pose $f : x \mapsto 4 - \frac{1}{4} \ln(x)$.

- f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour justifier que (u_n) est bien définie, montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et : $3 \leq u_n \leq e^4$:
 - Initialisation : $u_0 = 3$ est bien défini. Par ailleurs, $e^4 \geq 2^4 = 16 \geq 3$
 - Hérédité : soit un entier n tel que u_n soit défini et que $3 \leq u_n \leq e^4$. Puisque $u_n > 0$, on peut définir $u_{n+1} = f(u_n)$. Par ailleurs, $f(u_n) = 4 - \frac{1}{4} \ln(u_n)$. Puisque $u_n \leq e^4$, $\ln(u_n) \leq 4$ et donc $\frac{1}{4} \ln(u_n) \leq 1$, donc $f(u_n) \geq 3$. Par ailleurs, puisque $u_n \geq 3$, $\ln(u_n) > 0$ et $f(u_n) = 4 - \frac{1}{4} \ln(u_n) < 3 \leq e^4$. Ainsi, la récurrence est établie.
 - Conclusion : la suite (u_n) est bien définie et on a un encadrement : $\forall n \in \mathbb{N}, 3 \leq u_n \leq e^4$
- f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduira rapidement : (u_n) n'est pas monotone mais (u_{2n}) et (u_{2n+1}) le sont, et f admet au plus un point fixe.
- Recherche de points fixes : étudions l'équation $f(x) = 4 - \frac{1}{4} \ln(x) = x$ en posant $g : x \mapsto 4 - \frac{1}{4} \ln(x) - x$. g est clairement strictement décroissante et $g(3) = 1 - \frac{1}{4} \ln(3) \geq 0$, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$. Ainsi, par théorème des valeurs intermédiaires, g étant strictement décroissante, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\ell \geq 3$. ℓ est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$
- On voudrait savoir si ℓ est un point fixe attractif ou non. Étudions la dérivée de f . Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, f est dérivable en x avec : $f'(x) = -\frac{1}{4x}$. Pour $x \in [3; +\infty[$, $|f'(x)| = \frac{1}{4x} \leq \frac{1}{4 \times 3} = \frac{1}{12}$. Montrons donc que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$
- Par théorème des accroissements finis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque u_n et ℓ sont dans l'ensemble $[3; +\infty[$,

$$|f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{1}{12} |u_n - \ell|$$

c'est-à-dire : $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{12} |u_n - \ell|$. Par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n |u_0 - \ell|$. Puisque $\frac{1}{12} < 1$, $\left(\frac{1}{12}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par théorème des gendarmes, $|u_n - \ell| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc $u_n \rightarrow \ell$

Exercice 19. Donner un encadrement de : $\sqrt{1,04}, \ln(2), \sin(1), \frac{1}{e}$ en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange.

- Utilisons d'abord l'inégalité de Taylor-Lagrange sur la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$ et donc $|f''(x)| \leq \frac{1}{4}$. D'après la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 1,

$$|f(x) - f(0) - f'(0)x| \leq \frac{1}{4 \times 2} x^2$$

Ici,

$$\left| \sqrt{1,04} - 1 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{100} \right| \leq \frac{1}{4 \times 2} \left(\frac{4}{100} \right)^2$$

$$1 + \frac{2}{100} - \frac{2}{10000} \leq \sqrt{1,04} \leq 1 + \frac{2}{100} + \frac{2}{10000}$$

ou encore :

$$1,0198 \leq \sqrt{1,04} \leq 1,0202$$

-
- Utilisons maintenant la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$. $f(0) = 0$ et pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ donc $f'(0) = 1$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ donc $f''(0) = -1$ et $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \leq 2$ d'où :

$$|f(x) - f(0) - f'(0)x - f''(0)\frac{x^2}{2}| \leq \frac{2}{6}x^3 = \frac{1}{3}x^3$$

Pour $x = 1$:

$$|\ln(2) - 1 + \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{3}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \leq \ln(2) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

i.e.

$$\frac{1}{6} \leq \ln(2) \leq \frac{5}{6}$$

On peut aller jusqu'à un ou deux ordres plus loin pour avoir une approximation précise : avec des dérivées assez grandes autour de 0 et une valeur de x assez grande, l'approximation est large.

- On prend $f : x \mapsto \sin(x)$ avec $f(0) = 0$, $f'(x) = \cos(x)$ donc $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(x) = -\cos(x)$ donc $f'''(0) = -1$ et $f^{(4)}(x) = 0$, $|f^{(5)}(x)| = |\cos(x)| \leq 1$. On obtient :

$$|f(x) - f(0) - f'(0)x - f^{(2)}(0)\frac{x^2}{2} - f^{(3)}(0)\frac{x^3}{6} - f^{(4)}(0)\frac{x^4}{24}| \leq \frac{1}{120}x^5$$

i.e. $|\sin(1) - 1 + \frac{1}{6}| \leq \frac{1}{120}$ i.e. $\frac{5}{6} - \frac{1}{120} \leq \sin(1) \leq \frac{5}{6} + \frac{1}{120}$

L'approximation est beaucoup plus précise car on ajoute de nombreux termes à moindre coût (un terme sur deux est nul) et les dérivées sont relativement contenues (majorées par 1 en valeur absolue)

- On utilise la fonction $\exp$ sur $\mathbb{R}_-$ pour approximer $\exp(-1)$. $\exp(0) = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\exp^{(k)}(0) = 1$ et $\exp^{(k)}(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-$. Ainsi,

$$|f(x) - f(0) - f'(0)x - f''(0)\frac{x^2}{2} - f^{(3)}(0)\frac{x^3}{6}| \leq \frac{1}{24}|x|^4$$

Pour $x = -1$:

$$|\exp(-1) - 1 - (-1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}| \leq \frac{1}{24}$$

i.e.

$$\left| \frac{1}{e} - \frac{1}{3} \right| \leq \frac{1}{24}$$

i.e

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{24} \leq \frac{1}{e} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$$

ou pour donner une valeur approchée : $0.28 \leq \frac{1}{e} \leq 0.39$

Exercice 20. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n!^3}{(3n)!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et en déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n!^3}{(3n)!}$

Supposons $n \geq 1$ (sinon, c'est évident : on a $1 \leq 1$). En simplifiant au numérateur et au dénominateur par $n!$, on obtient :

$$\frac{n!^3}{(3n)!} = \frac{1}{(n+1) \dots (2n) \times (2n+1) \dots (3n)} \leq \frac{1}{(2n+1) \dots (3n)}$$

Or, chacun des facteurs au dénominateur est plus grand que 2 et il y a n termes d'où :

$$\frac{n!^3}{(3n)!} \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Puisque u_n est à termes positifs et majoré par $\frac{1}{2^n}$ qui est le terme général d'une série convergente (comme série géométrique), alors la série de terme général u_n converge.

Exercice 21. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et en déduire la nature de la série de terme général : $u_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln(n!)}$

Par décroissance de la fonction inverse, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [k; k+1]$, $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{t}$. En intégrant par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$$

i.e. : $\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \ln(k+1) - \ln(k)$.

Ainsi, pour tout $n \geq 2$,

$$u_n = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln(n!)} \geq \frac{\sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k)}{\ln(n!)} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n!)} \geq \frac{\ln(n)}{\ln(n!)}$$

Or, pour $n \geq 2$, $n! \leq n^n$ donc $u_n \geq \frac{\ln(n)}{\ln(n^n)} = \frac{\ln(n)}{n \ln(n)} = \frac{1}{n}$

Puisque par critère de Riemann, la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \frac{1}{n} \geq 0$, alors la série de terme général u_n diverge.

Exercice 22. En utilisant l'inégalité classique $\sin(x) \leq x$ pour $x \geq 0$, déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3(x)}{1+x} dx$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto \frac{\sin^3(x)}{1+x}$ est continue sur $[0; \frac{\pi}{n}]$ donc u_n est bien défini. Par ailleurs, $\sin(x)$ est positif pour tout $x \in [0; \pi]$, donc la suite (u_n) est de signe constant positif. D'après l'inégalité rappelée dans l'énoncé, et par croissance de l'intégrale,

$$u_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{x^3}{1+x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{n}} x^3 dx \leq \left(\frac{\pi}{n}\right)^3 = \frac{\pi^3}{n^3}$$

Or, par critère de Riemann, la série de terme général $\frac{\pi^3}{n^3}$ est convergente. Il en va donc de même pour la série de terme général u_n .