Feuille d'exercices Hors Série n°1 : Inégalités et encadrements

Techniques de base

Appliquer une fonction, multiplier, additionner ... L'enjeu est de choisir le bon argument pour justifier proprement !

Exercice 1. Soit $x \in [3;6]$ et $y \in [-4;-2]$. Encadrer : $x+y, x-y, xy, \frac{x}{y}$, en justifiant précisément.

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer :

1. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, x^{n+1} \leqslant x^n$
2. Si $x \geqslant 0$, $\frac{1}{1+e^x} \leqslant \frac{1}{2}$
3. $|x-1| \leqslant x^2 - x + 1$

Exercice 3 (Tableau de signes)**.** Résoudre l'inéquation :

$$\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \leqslant 0$$

Exercice 4. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{k=1}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

Exercice 5. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

On pourra introduire deux fonctions auxiliaires.

Exercice 6 (Propriétés des fonctions)**.** Soient f, g des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f, g sont croissantes sur $\mathbb{R}$, $f \circ g$ est croissante.
2. Et si f, g sont décroissantes ? Si f est croissante et g décroissante ?
3. Si f et g sont croissantes, est-il vrai que fg est une fonction croissante ?

Exercice 7 (Inégalités du second degré)**.**

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :
   (a) $x \mapsto \sqrt{2x^2 - 12x + 18}$
   (b) $x \mapsto \ln(x^2 + 4x + 4)$
   (c) $x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 3}$
   (d) $x \mapsto \ln\left(\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2-2x}\right)$
2. Résoudre l'inéquation :
$$e^{2x} - e^x \geqslant 6$$

Exercice 8 (Inégalité arithmético-géométrique)**.** Montrer que pour tous réels positifs a, b

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

Différentes inégalités triangulaires

Sur des réels en deux versions, sur des sommes finies ou infinies, sur des intégrales : des valeurs absolues partout !

On rappelle : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, |a+b| \leqslant |a| + |b|$

Exercice 9 (Applications de l'inégalité triangulaire)**.** Montrer :

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, ||a| - |b|| \leqslant |a-b|$
2. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, |a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|$
3. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$
   On pourra poser $f : u \mapsto \frac{u}{1+u}$ et étudier ses variations sur $\mathbb{R}_+$

Exercice 10. 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{1}{n^2+x^2} - \frac{1}{n^2+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}|x-y|$$

2. En déduire :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+x^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+y^2}\right| \leqslant \frac{\pi^2}{6}|x-y|$$

3. En justifiant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\frac{1}{n^2+x^2}$ converge, montrer que la fonction $x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Convexité

Inégalités des cordes et des tangentes, plusieurs caractérisations de la convexité

Exercice 11. Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x > -1, \ln(1+x) \leqslant x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1+x$
3. $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geqslant 0, x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0$
5. $\forall n \geqslant 2, \forall x \geqslant -1, (1+x)^n \geqslant 1+nx$

Exercice 12.

1. Montrer : $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, 1 + \left(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod\limits_{k=1}^{n} (1+x_k)\right)^{\frac{1}{n}}$
2. En déduire : $\forall (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}, \left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod\limits_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod\limits_{k=1}^{n} (a_k+b_k)\right)^{\frac{1}{n}}$
3. Montrer :

$$\forall x_1, \ldots, x_n > 0, \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

Exercice 13 (Inégalité de Hölder)**.** Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

1. En exploitant la concavité de la fonction ln, établir que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2, a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$
2. Soient a_1, a_2, b_1, b_2 des réels positifs. Montrer :

$$\frac{a_1 b_1}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q}\frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}$$

3. Montrer :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leqslant \sqrt[p]{a_1^p + a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}$$

4. Plus généralement, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in (\mathbb{R}_+)^{2n}$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}\sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}$$

Exercice 14 (Propriétés abstraites des fonctions convexes)**.** Montrer que si f, g sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ convexes et que g est croissante, alors $g \circ f$ est convexe.
Bonus : trouver un contre exemple pour le cas où g est décroissante.

Exercice 15 (Inégalité de Jensen - un lien avec les probabilités)**.**

1. Compléter l'encadré :

$$f \text{ est convexe sur } I \iff \left(\forall (x_1, \ldots, x_n) \in I^n, \forall (t_1, \ldots, t_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \sum_{k=1}^{n} t_k = 1 \Rightarrow \boxed{f\,(\ldots\ldots) \leqslant \ldots\ldots} \right)$$

2. Soit n un entier et X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Soit f une fonction convexe. Montrer :

$$f(E(X)) \leqslant E(f(X))$$

Inégalité des accroissements-finis, inégalité de Taylor-Lagrange

La principale utilisation de l'inégalité des accroissements finis dans le programme est l'étude de suites récurrentes. Quelques exemples ci-dessous.

Exercice 16. On considère la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par : $f(x) = \frac{1}{x+1}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer que si $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], f(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. En déduire que la suite (u_n) est bien définie et à valeurs dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$
2. Montrer : $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], |f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$
3. Montrer qu'il existe un unique réel $\ell \in]0;1[$ tel que $x^2 + x - 1 = 0$ puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - \ell|$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n$. Conclure sur la limite de la suite (u_n)

Exercice 17 (Adapté de EML 96)**.** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$.

1. Étudier la parité et les variations de f. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0$
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}^+$ et que $\ell \in [0; \frac{1}{2}]$
3. Montrer : $\forall x \geqslant 0, |f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$
4. On défiti la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Déterminer un intervalle I dans lequel toutes les valeurs de (u_n) sont comprises.
5. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$ puis déterminer la limite de (u_n)
6. Écrire trois programmes Python :
   (a) Une fonction `f` qui prend en entrée un réel x et renvoie $f(x)$
   (b) Une fonction `u` qui prend en entrée un entier n et renvoie u_n
   (c) Une fonction `approx`$_u$*quiprendenentreunentier*`n`*etrenvoieunevaleurapprochede*ℓ `à` 10^{-n} `près.`

♠ **Exercice 18.** Faire une analyse similaire de la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4 - \frac{1}{4}\ln(u_n)$

Exercice 19. Donner un encadrement de : $\sqrt{1,04}, \ln(2), \sin(1), \frac{1}{e}$ en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Applications à la nature de séries

Exercice 20. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n!^3}{(3n)!} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et en déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n!^3}{(3n)!}$

Exercice 21. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et en déduire la nature de la série de terme général : $u_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln(n!)}$

Exercice 22. En utilisant l'inégalité classique $\sin(x) \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$, déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3(x)}{1+x} dx$