Intro 1

CHAPITRE 1 : SOMMES, PRODUITS

I. NOTATIONS ET MANIPULATIONS

1. Notations

Notation. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier et $u_1, \dots, u_n$ des réels.

- On note $\sum_{i=1}^{n} u_i := u_1 + \dots + u_n$
- On note $\prod_{i=1}^{n} u_i := u_1 \times \dots \times u_n$

Définition 1 (Définition formelle). Soit $u_1, u_2, \dots$ une suite de réels. On définit par récurrence :
$\sum_{i=1}^{0} u_i = 0$, $\prod_{i=1}^{0} u_i = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $\sum_{i=1}^{n+1} u_i = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right) + u_{n+1}$
- $\prod_{i=1}^{n+1} u_i = \left(\prod_{i=1}^{n} u_i\right) \times u_{n+1}$

Remarque. Cette définition est très pratique pour démontrer des propriétés sur les sommes ou produits par récurrence.

Exemple. Écrire sous une forme plus compacte le calcul : $1+3+5+\dots+99$

Remarque.

- On peut aussi généraliser le symbole à un ensemble d'indices quelconques : si I est un ensemble **fini** et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels, on note $\sum_{i\in I}$ la somme des u_i.
- La variable i est une **variable muette**, qui naît et meurt avec l'écriture de la somme et n'a donc aucun sens en dehors. On peut utiliser une autre lettre (k souvent) mais pas n ici (n a déjà été déclaré plus haut) !
  ⚠ $i + \sum_{i=1}^{n} i^2$ n'existe pas. Que vaut $\sum_{i=1}^{n} n$?
- Si $n = 0$, $\sum_{k=1}^{n} u_k = 0$ et $\prod_{k=1}^{n} u_k = 1$

Fiche sur la récurrence

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$. Écrire sous la forme d'une formule fermée :

- $\sum_{i=1}^{n} x =$
- $\prod_{k=1}^{n} x =$

2. Propriétés

Toutes les propriétés de la somme et du produit peuvent alors se reformuler sous une forme plus compacte.

♡ **Propriété 2** (Commutativité, associativité, distributivité)**.** Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}, (v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux familles de réels et $n \in \mathbb{N}$.

- $\sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j$
- Pour tout nombre réel λ, $\sum_{k=1}^{n} (\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} u_k$

♣
- $\prod_{k=1}^{n} (u_k v_k) = \prod_{i=1}^{n} u_i \times \prod_{j=1}^{n} v_j$
- Pour tout nombre réel λ, $\prod_{k=1}^{n} (\lambda u_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} u_k$

Remarque. Dans les propriétés permettant de « séparer » une somme ou un produit, je choisis d'utiliser des variables différentes (i, j, k) pour chaque somme : ce n'est pas obligatoire car les variables sont muettes, mais c'est une bonne idée (au début ...) pour éviter les confusions.

Exemple. Montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Une version plus rapide (sans récurrence !) dans le TD.

3. Changements d'indices

Exemple (Un premier cas « simple »)**.** On considère la somme $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k+5}$. Écrire les premiers termes de cette somme. De quelle façon « plus naturelle » aurait-on pu l'écrire ?

Propriété 3. Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de réels. On a les changements d'indices suivants :

- En posant $j = k + p$: (décalage d'indice)

$$\sum_{k=1}^{n} u_{k+p} = \sum_{j=1+p}^{n+p} u_j \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} u_{k+p} = \prod_{j=1+p}^{n+p} u_j$$

- En posant $j = p - k$: (inversion du sens de sommation)

$$\sum_{k=1}^{n} u_{p-k} = \sum_{j=p-n}^{p-1} u_j \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} u_{p-k} = \prod_{j=p-n}^{p-1} u_j$$

♡ *Remarque.*

- Le plus souvent on posera $j = k+1$, $j = k-1$ ou $j = n-k$
- Pour d'autres changements d'indices, on sera prudent·e : il ne suffit pas de vérifier les bornes, par exemple comparer les sommes

$$\sum_{k=1}^{n} 2k \quad \text{et} \quad \sum_{j=2}^{2n} j$$

Exercice. Calculer

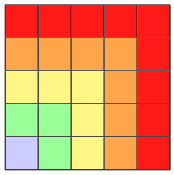
$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$$

II. Sommes et produits usuels

1. Sommes télescopiques

♡ **Propriété 4.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u_1, \dots, u_{n+1}$ des réels. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_1$$



Démonstration. Par récurrence, ou par changement d'indices

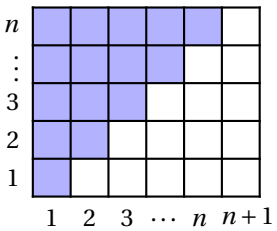
Exemple. Calculer $\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$ en utilisant un développement de $(k+1)^2$

2. Sommes arithmétiques

Démonstration (La méthode « du petit Gauss »).

Propriété 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$



♡ *Exercice.* Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On en déduit par les propriétés des sommes :

- $\sum_{k=p}^{n} 2k =$
- $\sum_{k=1}^{1000} (5 - 3k) =$
- $\sum_{\substack{k\in[\![1;100]\!] \\ k \text{ impair}}} k =$

3. Suites géométriques

Propriété 6. Soit $q \neq 1$ un réel et n un entier.

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Démonstration. Calculer $(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k$

♣ *Exercice.* Soient p, n des entiers et $q \neq 1, \alpha$ des réels. Calculer

♡
- $\sum_{k=p}^{n} (\alpha q^k) =$
- $\sum_{k=0}^{1000} (-2)^k =$
- $\prod_{k=10}^{100} 3^k$

4. Factorielle

Définition 7. On définit pour tout entier naturel n le nombre $n!$ (« factorielle n ») en définissant :
- $0! = 1$
- Pour tout entier naturel n, $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Remarque. Cette définition est par récurrence.

Propriété 8 (Factorielle)**.**

$$\prod_{k=1}^{n} k = n!$$

♡ *Exercice.* Soit n un entier naturel au moins égal à 1. Simplifier les calculs suivants :

- $\frac{7!}{5!}$
- $\frac{(n+1)!}{n!}$
- $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$
- $(n+1)! - n!$

♡ *Exercice.* Calculer $\prod_{k=1}^{n} (2k)$ puis $\prod_{k=1}^{n} (2k+1)$

III. Formule du binôme de Newton

1. Sur les coefficients binômiaux

Définition 9 (Relation de récurrence)**.** On définit pour tout entier n, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et :

$$\text{Pour } n, k \in \mathbb{N}, \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Démonstration. Disjonction de cas.

Remarque. Triangle de Pascal.

♡ **Propriété 10** (Formule explicite)**.** Soient $n \in \mathbb{N}, k \in [|0; n|]$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times \ldots \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

♡ *Démonstration.* Par récurrence

Remarque. On en déduit immédiatement : $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

Propriété 11 (avec n/p)**.**

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } p \in [|0;n|], \binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p}$$

Démonstration.

Remarque. Variantes.

2. La formule

Exemple. On connait l'identité remarquable $(a+b)^2 =$ ..... et parfois $(a+b)^3 =$ ....., on va généraliser.

♡ **Propriété 12.** Soient $n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. Par récurrence.

Exercice. Calculer $(1+x)^n$ pour x réel et n entier.

IV. SOMMES DOUBLES

Exemple. On a dit au début qu'on pouvait généraliser le symbole somme à n'importe quel ensemble fini I : prenons $I = [|1;n|] \times [|1;n|]$. On écrit $\sum_{(i,j)\in I} u_{i,j} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} u_{i,j}$

- En sommant par colonne, puis en sommant les résultats obtenus :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} u_{i,j}$$

- En sommant par ligne, puis en sommant les résultats obtenus :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{i,j}$$

$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	$\dots$	$u_{1,n}$
$u_{2,1}$	$u_{2,2}$	$\dots$	$u_{2,n}$
$\vdots$		$\ddots$	$\vdots$
$u_{n,1}$	$u_{n,2}$	$\dots$	$u_{n,n}$

- En sommant par ligne, puis en sommant les résultats obtenus :

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} u_{i,j}$$

- En sommant par colonne, puis en sommant les résultats obtenus :

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} u_{i,j}$$

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant j\leqslant n} \frac{k}{j}$$

Remarque. Tout ce qu'on a dit ici s'applique évidemment aux produits doubles.