Feuille d'exercices n°1

Utilisation du symbole

Exercice 1. Écrire sous une forme plus compacte les calculs suivants :

1. $n + (n + 1) + (n + 2) + \dots + 2n$	3. $1 - 2 + 3 - \dots - 104$
2. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1000}$	4. $(x - a_1)^{\alpha_1} \times \dots \times (x - a_n)^{\alpha_n}$

Remarque : dans tous les calculs précédents, on suppose que tout le monde voit la même chose dans les «...» Avec le symbole $\sum$, on en est sûr.e.s!

Sommes classiques

◇ **Exercice 2** (Sommes arithmétiques et géométriques). Soit n un entier. Simplifier les sommes suivantes.

1. $\sum_{k=1}^n (4k - 5)$	3. $\sum_{k=n}^{2n} k$	5. $\sum_{k=0}^n (3^{-k} + 2)$	7. $\sum_{k=2}^n 2^{2k-3}$
2. $\sum_{k=2}^{n-1} k$	4. $\sum_{k=0}^n \frac{4}{5^k}$	6. $\sum_{k=3}^n 5^{k-3}$	

Manipulations de sommes et produits, récurrences

Exercice 3 (Un exemple du cours - version express).

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$	2. Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

Exercice 4 (Des formules avec des sommes et des produits). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer ou simplifier les expressions suivantes :

1. $\prod_{k=2}^n \frac{\ln(k+1)}{\ln(k)}$	3. $\prod_{k=1}^n 2k^2(k+1)$	5. $\frac{\prod_{k=2}^n (k-1)^3}{\prod_{k=2}^n (k+1)^3}$ (ici, $n \geq 2$)
2. $\prod_{k=1}^n e^{k/n}$	4. $\sum_{k=1}^n kk!$	

Exercice 5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n k! \leq (n+1)!$$

Exercice 6 (Somme des entiers successifs - démonstrations).

1. En effectuant le changement d'indice $j = n - k$, montrer que

$$2 \sum_{k=1}^n k = n(n+1)$$

2. Une autre preuve : montrer la formule $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ par récurrence

♡ **Exercice 7** (somme des carrés, somme des cubes). Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence les relations

1. $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	2. $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Pour la première relation : est-ce étonnant que $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ soit toujours un entier ?

◇ **Exercice 8** (Une identité remarquable généralisée). Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Coefficients binômiaux

Exercice 9 (Avec des coefficients binômiaux). Soit $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $p \leq n$. Montrer : $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

Exercice 10 (Le binôme, première application). En utilisant la formule du binôme de Newton, développer $(1+x)^4$ et $(1-x)^4$

◇ **Exercice 11.** Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer

1. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$	3. $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$	5. $\sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1}$
2. $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$	4. $\sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p}$	6. $\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1}$

On pourra commencer par remarquer que sous certaines conditions, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

Exercice 12 (Interprétation combinatoire). En utilisant la définition des coefficients binômiaux, interpréter la formule 1 de l'exercice précédent.

♠ **Exercice 13** (Le binôme généralisé).

- Quel est le coefficient devant $a^2 b^4 c$ dans $(a+b+c)^7$?
- Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_m$ des réels. Montrer

$$(x_1 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m \\ n_1 + \dots + n_m = n}} \frac{n!}{n_1! \dots n_m!} x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m}$$

Sommes doubles

Exercice 14 (Plein d'exemples). Calculer

1. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$	3. $\sum_{1 \leq j, k \leq n} 2^{j-k}$	5. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$
2. $\sum_{1 \leq 1 \leq j \leq n} \frac{i}{j}$	4. $\sum_{1 \leq k \leq j \leq n} (j - 2k)$	6. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} i - j $

Remarque : $|i - j|$ vaut $i - j$ si $i - j$ est positif, et $j - i$ si $i - j$ est négatif.

◇ **Exercice 15** (Une astuce fréquente!).

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'égalité :

$$\sum_{k=1}^n k 2^k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k 2^k$$

- Calculer $\sum_{k=1}^n k 2^k$

Plus d'exercices sur la récurrence

Exercice 16 (Comparaison de suites). Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n-1} \leq 1 \times \dots \times n \leq n^n$

Exercice 17 (Une propriété étonnante). Que pensez-vous de la démonstration ci-dessous ?

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété : « $\mathcal{P}(n)$: pour tous n points du plan, ces points appartiennent à une même droite»

Initialisation : Pour $n = 1$, la propriété est évidente

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifiée, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.

Soient $M_1, M_2, \dots, M_{n+1}$ des points du plan. Alors, par hypothèse de récurrence, il existe une droite (d_1) contenant $M_1, \dots, M_n$. De même, il existe une droite (d_2) contenant $M_2, \dots, M_{n+1}$. Comme (d_1) et (d_2) ont $n - 1$ points en commun, elles sont confondues. Ainsi, $M_1, \dots, M_{n+1}$ sont alignés et la propriété est héréditaire.

Conclusion : toute famille de points du plan est alignée sur une même droite.