Devoir Maison n°2

Exercice 1 - Quantificateurs

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On considère les quatre énoncés mathématiques suivants :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$
2. $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ et $g(x) = 0$
4. $(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$

Montrer que les propositions 1 et 2 ne sont pas équivalentes, puis que les propositions 3 et 4 ne sont pas équivalentes.

Pour chacun des cas, on proposera un contre exemple sous la forme d'un couple f, g de fonctions. On pourra les définir par une expression algébrique ou proposer une représentation graphique. Expliquez sur votre copie la construction de vos contre-exemples (comment les trouver ? qu'est-ce que ces fonctions ont de spécial ?)

Exercice 2 - Applications bijectives

1. Soit $f : E \to F$ une application. Montrer qu'il y a équivalence entre :
   (a) f est injective
   (b) Pour toutes parties A, B de E,
   $$A \cap B = \varnothing \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \varnothing$$
2. Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$ définie par $f(p, q) = 2^p(2q + 1)$. Montrer que f est bijective.