Devoir Maison n°1 - Exercices variés (sommes, produits, récurrences)

EXERCICE 1 - PRODUITS

On cherche à montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1)$$

1. Méthode 1 : justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} (2k-1) = 2(2n+1) \times 2^n \times \prod_{k=1}^n (2k-1)$ puis conclure par récurrence.
2. Méthode 2 : Exprimer plus simplement $\prod_{k=1}^n (2k-1) \times \prod_{k=1}^n (2k)$ (on pourra commencer par les premières valeurs de n) puis conclure sans récurrence.

EXERCICE 2 - RACINES ET PUISSANCES

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe **des entiers** a_n, b_n, c_n, d_n tels que $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}$.
Écrire un système d'équations permettant d'exprimer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n, d_n

EXERCICE 3 - INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ

Soit n un entier naturel non nul et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels.

1. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^n (x_i + ty_i)^2 = at^2 + bt + c$$

où a, b, c sont trois réels à exprimer sous la forme de sommes en fonction des (x_i) et des (y_i)

2. En s'appuyant sur le signe du trinôme du second degré de la question précédente, montrer :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Cette inégalité est appelée **inégalité de Cauchy-Schwarz**

3. En appliquant la précédente inégalité à des réels bien choisis, montrer :

$$\frac{6n}{(n+1)(2n+1)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$