Rappels sur la démonstration par récurrence.

Théorème (Principe de récurrence - admis) On appelle $\mathcal{P}$ une propriété définie pour chaque entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}$ vérifie

- Il existe (au moins) un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n_0)$ soit vraie
- Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$, c'est-à-dire : **si** $\mathcal{P}(n)$ est vraie, **alors** $\mathcal{P}(n+1)$ aussi.

On peut alors conclure :

Pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie

Deux ingrédients essentiels pour une bonne récurrence :

- Une propriété à montrer **pour tout entier**
- Une **relation de récurrence** : lien entre un terme et le suivant.

Rédaction :

- Dans une première phrase, on annonce ce qu'on va montrer, et qu'on raisonne par récurrence : « Montrons par récurrence que (...) »
On peut économiser cette phrase si l'énoncé indique «montrer par récurrence ...»
- Initialisation : préciser pour quel entier la propriété sera initialisée, et vérifier que la propriété est vraie pour cet entier.
- Hérédité : «Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que (...)». Il faut à la fois introduire un n **quelconque** et préciser qu'on suppose que **pour cet entier**, la propriété est vérifiée. On ajoute ensuite une ou plusieurs étapes de calcul où on raisonne par implications pour déduire $\mathcal{P}(n+1)$
- Conclusion : Pour tout entier n , (...)

Exercice (Démonstrations par récurrence) Montrer par récurrence les propriétés suivantes.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n \geq n.$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2n} + 2$ est un multiple de 3.
3. $\forall n \geq 2, 3^n \geq n^2.$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$

Rappels sur la démonstration par récurrence.

Théorème (Principe de récurrence - admis) On appelle $\mathcal{P}$ une propriété définie pour chaque entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}$ vérifie

- Il existe (au moins) un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n_0)$ soit vraie
- Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$, c'est-à-dire : **si** $\mathcal{P}(n)$ est vraie, **alors** $\mathcal{P}(n+1)$ aussi.

On peut alors conclure :

Pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie

Deux ingrédients essentiels pour une bonne récurrence :

- Une propriété à montrer **pour tout entier**
- Une **relation de récurrence** : lien entre un terme et le suivant.

Rédaction :

- Dans une première phrase, on annonce ce qu'on va montrer, et qu'on raisonne par récurrence : « Montrons par récurrence que (...) »
On peut économiser cette phrase si l'énoncé indique «montrer par récurrence ...»
- Initialisation : préciser pour quel entier la propriété sera initialisée, et vérifier que la propriété est vraie pour cet entier.
- Hérédité : «Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que (...)». Il faut à la fois introduire un n **quelconque** et préciser qu'on suppose que **pour cet entier**, la propriété est vérifiée. On ajoute ensuite une ou plusieurs étapes de calcul où on raisonne par implications pour déduire $\mathcal{P}(n+1)$
- Conclusion : Pour tout entier n , (...)

Exercice (Démonstrations par récurrence) Montrer par récurrence les propriétés suivantes.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n \geq n.$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2n} + 2$ est un multiple de 3.
3. $\forall n \geq 2, 3^n \geq n^2.$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$