

One Exercise To Solve Them All

Farouk Boucekkine (d'après un auteur inconnu)

afb.maths@gmail.com

Préambule : Cet exercice m'a été donné par Xavier Caruso lorsqu'on organisait ensemble le tutorat de Seconde d'Animath. Je m'en suis depuis servi à de nombreuses reprises dans des situations d'enseignement (en prépa, avec des lycéens) ou comme énigme à donner à des amis.

Il illustre magnifiquement certains aspects de la pensée mathématique : le raisonnement par condition nécessaire et suffisante (également nommé « Analyse et Synthèse »), le raisonnement par l'absurde, et l'idée qu'on part complètement dans le noir, qu'on trouve des petits bouts de solution et qu'on les colle petit à petit pour voir se dessiner LA solution (ou plutôt UNE solution car on peut prendre divers chemins).

Malheureusement, Xavier ne sait plus aujourd'hui où il l'avait trouvé à l'époque, si bien que cette petite merveille est désormais anonyme. Je serais ravi qu'on me communique toute information sur l'auteur de cet exercice, ne serait-ce que pour lui demander l'autorisation (un peu tard !) pour utiliser son travail.

En attendant, amusez-vous bien !

Le but de cet exercice est de trouver tous les nombres N (s'il en existe) vérifiant un certain nombre de règles.

(i) N est un nombre entier positif ou nul, écrit en base 10 (c'est à dire avec les chiffres habituels).

(ii) Voici une liste d'assertions qui se réfèrent à N avec la règle suivante : si une assertion est vraie, son numéro apparaît comme chiffre de N , sinon, il n'y apparaît pas (sans fourberie : pas de « 0 » inutile en début de nombre car on n'écrit pas « 00012 » mais « 12 »).

- (0) La somme des chiffres du nombre est un nombre premier.
- (1) Le produit des chiffres du nombre est impair.
- (2) Chacun des chiffres du nombre est strictement inférieur au chiffre suivant (sauf pour le dernier bien entendu ! et on lit les chiffres de gauche à droite).
- (3) Aucun chiffre du nombre n'est égal à un autre.
- (4) Aucun des chiffres du nombre n'est strictement supérieur à quatre.
- (5) Le nombre a (strictement) moins de six chiffres.
- (6) Le produit des chiffres du nombre n'est pas divisible par 6.
- (7) Le nombre est pair.
- (8) Aucun chiffre du nombre ne diffère de un d'un autre chiffre du nombre.
- (9) Au moins un des chiffres du nombre est égal à la somme de deux autres chiffres du nombre. (Les trois chiffres en question doivent être des chiffres différents du nombre à trouver. Précisément, un chiffre peut être compté deux fois, mais il faut alors qu'il apparaisse deux fois dans le nombre.)

Rappels :

(i) Si a and b sont deux entiers positifs, on dit que a *divise* b lorsqu'il existe un entier c tel que $b = a.c$. On dit dans ce cas que a et c sont des *diviseurs* de b .

(ii) Un entier p est dit *pair* lorsque 2 divise p (par exemple : 2, 4, 3468).
Sinon, p est dit *impair* (ex : 3, 5, 6657).

(iii) Un entier positif p est dit *premier* lorsque p a exactement 2 diviseurs positifs : 1 et p lui-même.

Attention ! 0 et 1 ne sont pas premiers ! (tout entier divise 0 et 1 a seulement UN diviseur positif).

Solution

Les parties en **grisé** sont des commentaires qui ne sont pas nécessaires à la solution d'un point de vue purement logique.

On commence par chercher un *point d'entrée* au problème : une des phrases est-elle plus simple à éliminer ou à affirmer que les autres ? Ici c'est la phrase (6), incohérente avec l'hypothèse générale qui va nous fournir ce point d'entrée.

Puis on procède par *analyse et synthèse* : que se passe-t-il si N contient un 1 ? Ces Analyses se transforment rapidement en raisonnements par l'absurde car pour la plupart des chiffres on finit par tomber sur une contradiction.

Rappels : 0 est un nombre pair.

0 et 1 ne sont pas premiers.

Tout nombre divise 0, et 0 ne divise personne (à part lui-même).

Notation : Les chiffres sont notés sans parenthèses (ex : « Si 8 apparaissait dans N »), et les phrases avec parenthèses (ex : « alors (8) serait vraie »).

Usage de ce corrigé : Chaque étape est clairement annoncée. Par exemple, la première étape est annoncée par : « • N n'a pas de 6 : Par l'absurde : Supposons que (6) est vraie. ».

Regardez le titre de l'étape, et essayez de le faire par vous-mêmes ! Puis comparez, et passez à l'étape suivante.

N'hésitez pas à améliorer cette rédaction en me faisant part de vos trouvailles pour court-circuiter certaines longueurs..

Analyse :

- N n'a pas de 6 : Par l'absurde : Supposons que (6) est vraie.

Alors le produit des chiffres de N est non-divisible par 6. Or, il y a 6 parmi eux. **CONTRADICTION !**

On sait de plus désormais que le produit des chiffres de N est divisible par 6.

Donc N contient nécessairement 3, 9 ou 0 (et oui, ne pas l'oublier celui-là).

- N n'a pas de 1 : Par l'absurde : Supposons que (1) est vraie.

Alors N ne contient que des chiffres impairs, qui ne peuvent donc pas différer de 1.

Par conséquent (8) est vraie aussi, et N contient donc un 8. **CONTRADICTION !**

On sait désormais que N contient au moins un chiffre pair.

- N n'a pas de 4 : Par l'absurde : Supposons (4) vraie.

Alors N s'écrit avec les chiffres : 0, 2, 3 et 4.

– Supposons (2) vraie, alors (3) est vraie (car $(2) \implies (3)$), Et N s'écrit alors avec au plus 4 chiffres, donc (5) est vrai. **CONTRADICTION !** avec (4).

– Supposons (2) fausse, alors, comme (8) est fausse, on a forcément 3 parmi les chiffres de N . Donc (3) est vraie et, comme ci-dessus, **CONTRADICTION !**

- N n'a pas de 2 : Par l'absurde : Supposons que (2) soit vraie.

– Alors 0 ne peut pas apparaître dans N (car c'est le chiffre le plus petit, or on ne peut pas avoir de 0 comme premier chiffre).

– De plus, comme précédemment, (3) est impliquée par (2), donc N contient 2 et 3, donc (8) est fausse.
Par conséquent 8 n'apparaît pas dans N .

– Ainsi, N s'écrit avec les chiffres 2,3,5,7,9 (chacun apparaissant au plus une fois, et en ordre croissant).
Donc (5) est vraie, donc N contient 5.

– Ainsi, N contient à coup sûr 2, 3 et 5.

Or $2 + 3 = 5$, donc (9) est vraie.

Donc N a 9 pour dernier chiffre (à cause de la phrase (2)).

– N est donc impair, donc (7) est fausse.

– D'après tout ce qui précède, si (2) est vraie, alors $N = 2359$.

– Mais en fait $2+3+5+9 = 19$ est un nombre premier, donc N devrait contenir le chiffre 0. **CONTRADICTION !**

- N a forcément au moins un 8 : Par l'absurde : Supposons (8) fausse.

Alors N s'écrit avec les chiffres 0, 3, 5, 7 et 9. Donc aucun chiffre n'est distant de 1 d'un autre chiffre : (8) est vraie! **CONTRADICTION !**

- N n'a ni de 9, ni de 7 :

D'après ce qui précède, N contient 8, et donc (8) est vraie.

Donc les deux chiffres 7 et 9 ne peuvent pas apparaître dans N (sinon, cela contredirait (8), étant donné que 8 est assurément présent d'après ce qui précède.)

- N n'a pas de 3 : Par l'absurde : Supposons que (3) soit vraie.

Alors N s'écrit avec les chiffres 0, 3, 5, 8, chacun apparaissant au plus une fois.

Alors (5) est vraie, donc 5 apparaît dans N .

3,5 et 8 apparaissent dans N , donc (9) est vraie : **CONTRADICTION !** avec le paragraphe précédent.

Récapitulons : Les seuls chiffres qui peuvent apparaître sont le 0, le 8 et le 5.

On sait de plus que le 8 apparaît sûrement.

- N a forcément au moins un 0 : Par l'absurde : Supposons que 0 n'apparaisse pas.

Alors le produit des chiffres de N est de la forme $5^k \cdot 8^p$, et ne peut donc pas être divisible par 6 : **CONTRADICTION !** avec le fait que (6) est fausse.

- N a forcément au moins un 5 : Par l'absurde : Supposons que 5 n'apparaisse pas.

Alors N est forcément pair : **CONTRADICTION !** avec le fait que (7) est fausse.

Récapitulons : N s'écrit avec 0, le 8 et le 5, chacun apparaissant au moins une fois

- 5 et 8 apparaissent une et une seule fois : Par l'absurde : Supposons que 5 apparaisse deux fois.

Comme on a un 0 dans N on pourrait alors écrire $5 = 5 + 0$, donc (9) serait vraie : CONTRADICTION !

Idem pour 8.

- N est soit 805, soit 8005, soit 80005 : 5 apparaît une seule fois, et N est impair (car (7) est fausse), donc 5 est le dernier chiffre.

Par hypothèse, N ne peut pas commencer par 0, donc il commence forcément par 8.

Il reste les chiffres entre le 8 et le 5, qui ne peuvent être que des 0.

Il y a au moins un 0, et au plus trois, car (5) est vraie.

- N ne peut pas être 805 : Sinon (3) serait vraie, ce qui n'est pas le cas.
- N ne peut pas être 80005 : Sinon on aurait $0 + 0 = 0$, et donc (9) serait vraie, ce qui n'est pas le cas.

Conclusion de l'analyse : N ne peut être que 8005 .

Synthèse :

Prenons $N = 8005$: on vérifie bien que (0), (5) et (8) sont vraies et que toutes les autres sont fausses.

Conclusion : Un nombre N et un seul est solution : $N = 8005$