# Devoir Maison n°1 - Exercices variés (sommes, produits, récurrences)

## Exercice 1 - Produits

On cherche à montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$$

1. Méthode 1 : justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1}(2k-1) = 2(2n+1) \times 2^n \times \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$ puis conclure par récurrence.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. $2^{n+1} = 2 \times 2^n$ et par ailleurs $\prod_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (2\times(n+1)-1)\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}(2k-1)$, d'où l'égalité annoncée. Montront maintenant la propriété par récurrence.

   Initialisation : pour $n=1$, $\prod_{k=1}^{1}(k+1) = (1+1) = 2$ et par ailleurs, $2^1 \prod_{k=1}^{1}(2k-1) = 2\times(2\times 1-1) = 2$. La propriété est ainsi initialisée.

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier tel que $\prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$.

   Alors, d'après la propriété montrée en introduction,

$$\begin{aligned}
2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= 2\times(2n+1)\times 2^n \times \prod_{k=1}^{n}(2k-1)\\
&= 2\times(2n+1)\times\prod_{k=1}^{n}(n+k) \text{ par hypothèse de récurrence}\\
&= 2(2n+1)\prod_{j=0}^{n-1}(n+j+1) \text{ en posant } j=k-1\\
&= 2(n+1)(2n+1)\prod_{j=1}^{n-1}(n+1+j) \text{ en isolant le terme } j=0\\
&= (2n+1)(2n+2)\prod_{j=1}^{n-1}(n+j+1)\\
&= \prod_{j=1}^{n+1}(n+j+1) \text{ car } n+n+1 = 2n+1 \text{ et } n+n+1+1 = 2n+2
\end{aligned}$$

   La récurrence est établie.

2. Méthode 2 : Exprimer plus simplement $\prod_{k=1}^{n}(2k-1) \times \prod_{k=1}^{n}(2k)$ *(on pourra commencer par les premières valeurs de $n$)* puis conclure sans récurrence.

   Puisque $\prod_{k=1}^{n}(2k-1)$ est le produit de tous les nombres impairs de $1$ à $2n-1$ et $\prod_{k=1}^{n}(2k)$ est le produit de tous les nombres pairs de $2$ à $2n$, $\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\times\prod_{k=1}^{n}(2k) = \prod_{k=1}^{2n} k = (2n)!$

   On en déduit :

$$2^n\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = 2^n\frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{2^n(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{n!} = (n+1)(n+2)\dots(n+n) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$$

## Exercice 2 - Racines et puissances

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe **des entiers** $a_n, b_n, c_n, d_n$ tels que $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}$.
Écrire un système d'équations permettant d'exprimer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}$ en fonction de $a_n, b_n, c_n, d_n$

Montrons cette propriété par récurrence.

Initialisation : pour $n=0$, $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^0 = 1 = 1 + 0\sqrt{2} + 0\sqrt{3} + 0\sqrt{6}$. La propriété est initialisée avec $a_0 = 1, b_0 = c_0 = d_0 = 0$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_n, b_n, c_n, d_n$ des entiers tels que $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}$
Alors,

$$\begin{aligned}
(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{n+1} &= (\sqrt{2}+\sqrt{3}) \times (\sqrt{2}+\sqrt{3})^n \\
&= (\sqrt{2}+\sqrt{3}) \times (a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}) \\
&= a_n\sqrt{2} + a_n\sqrt{3} + b_n\sqrt{2}^2 + b_n\sqrt{2}\sqrt{3} + c_n\sqrt{3}\sqrt{2} + c_n\sqrt{3}^2 + d_n\sqrt{6}\sqrt{2} + d_n\sqrt{6}\sqrt{3} \\
&= a_n\sqrt{2} + a_n\sqrt{3} + (b_n + c_n)\sqrt{6} + 2b_n + 3c_n + d_n\sqrt{12} + d_n\sqrt{18} \\
&= (2b_n + 3c_n) + a_n\sqrt{2} + a_n\sqrt{3} + (b_n + c_n)\sqrt{6} + 2d_n\sqrt{3} + 3d_n\sqrt{2} \\
&= (2b_n + 3c_n) + (a_n + 3d_n)\sqrt{2} + (a_n + 2d_n)\sqrt{3} + (b_n + c_n)\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Ainsi, avec :

$$\left\{\begin{array}{ccccc}
a_{n+1} & = & 2b_n & + & 3c_n \\
b_{n+1} & = & a_n & + & 3d_n \\
c_{n+1} & = & a_n & + & 2d_n \\
d_{n+1} & = & b_n & + & c_n
\end{array}\right.$$

$a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}$ sont des entiers (puisque $a_n, b_n, c_n, d_n$ le sont) et :

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} + c_{n+1}\sqrt{3} + d_{n+1}\sqrt{6}$$

d'où l'hérédité.

## Exercice 3 - Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $n$ un entier naturel non nul et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels.

1. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + ty_i)^2 = at^2 + bt + c$$

où $a, b, c$ sont trois réels à exprimer sous la forme de sommes en fonction des $(x_i)$ et des $(y_i)$
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (x_i + ty_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2tx_iy_i + t^2y_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \left(2\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right) t + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) t^2
\end{aligned}$$

ce qui montre la propriété demandée avec : $a = \sum_{i=1}^{n} y_i^2, b = \sum_{i=1}^{n} 2x_iy_i, c = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

2. En s'appuyant sur le signe du trinôme du second degré de la question précédente, montrer :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Cette inégalité est appelée **inégalité de Cauchy-Schwarz**
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{n} (x_i + ty_i)^2$ est positif (puisque c'est une somme de carrés) donc $at^2 + bt + c \geq 0$. On en déduit que le discriminant de ce polynôme est négatif ou nul : $b^2 - 4ac \leq 0$, ou en remplaçant par les valeurs de la question précédente :

$$\left(2\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)^2 \leq 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

En divisant pas 4 à gauche et à droite de l'inégalité, et en passant à la racine carrée (puisque tout est positif) :

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Puisque pour tout réel $y$, $\sqrt{y^2} = |y|$, on a bien l'inégalité demandée.

3. En appliquant la précédente inégalité à des réels bien choisis, montrer :

$$\frac{6n}{(n+1)(2n+1)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Pour cette dernière question, il faut faire preuve d'un peu de créativité pour faire apparaître les valeurs demandées. On choisit : $x_k = \frac{1}{k}$ pour faire apparaître $\frac{1}{k^2}$, et $y_k = k$, d'où :

$$\sum_{k=1}^{n} k \times \frac{1}{k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2}$$

Avec la formule du TD :

$$n \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

En élevant l'inégalité au carré, on obtient :

$$n^2 \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

ou encore :

$$\frac{6n^2}{n(n+1)(2n+1)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

On conclut en simplifiant par $n$ dans la fraction à gauche de l'inégalité.