Feuille d'exercices n°1

Exercice 5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k! \leq (n+1)!$$

Méthode 1 : Par récurrence.

Initialisation : pour $n = 0$, alors $\sum\limits_{k=1}^{0} k! = 0$ et $(0+1)! = 1$. On vérifie bien $0 \leq 1$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} k! \leq (n+1)!$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k! &= \sum_{k=1}^{n} k! + (n+1)! \\
&\leq (n+1)! + (n+1)! \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&\leq 2(n+1)! \\
&\leq (n+2)(n+1)! \text{ puisque } n+2 \geq 2 \\
&\leq (n+2)!
\end{aligned}$$

et la récurrence est établie.

Méthode 2 : pour tout $k \in [|1;n|], k! \leq n!$ par croissance de la factorielle. En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} k! \leq \sum_{k=1}^{n} n! = n \times n! \leq (n+1)n! \leq (n+1)!$$

d'où la conclusion.

Exercice 6 (Somme des entiers successifs - démonstrations)**.**

1. En effectuant le changement d'indice $j = n - k$, montrer que

$$2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$$

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \sum_{j=1}^{n} (n+1-j) + \sum_{k=1}^{n} k \text{ en posant } j = n+1-k \\
&= \sum_{j=1}^{n} (n+1-j) + j \\
&= \sum_{j=1}^{n} (n+1) \\
&= n \times (n+1)
\end{aligned}$$

d'où en divisant par 2 : $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

2. Une autre preuve : montrer la formule $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ par récurrence

Initialisation : pour $n = 0$, $\sum\limits_{k=1}^{0} k = 0$ et $\frac{0(0+1)}{2} = 0$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

et la récurrence est établie.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 9 (Avec des coefficients binômiaux)**.** Soit $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $p \leq n$. Montrer : $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

La propriété se montre encore une fois par récurrence.

Initialisation : pour $n = 0$, on a nécessairement $p = 0$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{k}{0} = \binom{0}{0} = 1$ et par ailleurs $\binom{1}{1} = 1$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall p \in [|0;n|], \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Soit $p \in [|0;n+1|]$. Alors,

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p}$$

Si $p = n+1$: $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=n+1}^{n} \binom{k}{p} = 0$ et $\binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{n+1} = 1 = \binom{n+2}{n+2}$ donc la propriété est vérifiée.
Si $p \leq n$, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}$$

d'après la formule de Pascal. La récurrence est donc établie.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [|0;n|], \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

Exercice 10 (Le binôme, première application)**.** En utilisant la formule du binôme de Newton, développer $(1+x)^4$ et $(1-x)^4$
Les coefficients du binôme pour $n = 4$ sont : $1, 4, 6, 4, 1$, d'où : $(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$. De même, $(1-x)^4 = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + 1$

Exercice 14 (Plein d'exemples)**.** Calculer

1. $\sum_{1 \leq i,j \leq n} ij$

   $\sum_{1 \leq i,j \leq n} ij = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n} \left(i \sum_{j=1}^{n} j\right) = \sum_{i=1}^{n} i \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n} i = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
2. $\sum_{1 \leq 1 \leq j \leq n} \frac{i}{j}$

   $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (j+1) = \frac{1}{4}\left(n(n+3)\right)$
3. $\sum_{1 \leq j,k \leq n} 2^{j-k}$

$$
\begin{aligned}
\sum_{1\le j,k\le n} 2^{j-k} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} 2^{j-k} \\
&= \sum_{j=1}^{n} 2^j \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \sum_{j=1}^{n} 2^j \times \frac{1}{2}\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\sum_{j=1}^{n} 2^j \\
&= \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \times 2 \times \frac{1-2^n}{1-2} \\
&= -2\left(1-(\frac{1}{2})^n\right)(1-2^n)
\end{aligned}
$$

4. $\sum_{1\le k\le j\le n} (j-2k)$

$\sum_{1\le k\le j\le n} (j-2k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}(j-2k) = \sum_{j=1}^{n}\left(j-2\sum_{k=1}^{j}k\right) = \sum_{j=1}^{n}(j-j(j+1)) = \sum_{j=1}^{n}-j^2 = -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5. $\sum_{1\le i,j\le n} \min(i,j)$

$$
\begin{aligned}
\sum_{1\le i,j\le n} \min(i,j) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\min(i,j) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\min(i,j) + \sum_{i=j+1}^{n}\min(i,j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} i + \sum_{i=j+1}^{n} j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j(j+1)}{2} + (n-j)j\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^2+j+2nj-2j^2) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(2n+1)j - j^2 \\
&= \frac{1}{2}\left((2n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= \frac{n(n+1)2n+1}{6}
\end{aligned}
$$

6. $\sum_{1\le i,j\le n} |i-j|$

Avec la même idée :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j| &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|i-j| \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}|i-j| + \sum_{i=j+1}^{n}|i-j|\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}(j-i) + \sum_{i=j+1}^{n}(i-j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(j^2 - \frac{j(j+1)}{2} - (n-j)j + \frac{(n-j)(n+j+1)}{2}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}j^2 - \frac{1}{2}j - nj + j^2 + \frac{1}{2}(n^2 - nj + nj - j^2 + n - j) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(j^2 - (n+1)j + \frac{1}{2}(n^2+n) \\
&= \frac{n(n+1)2n+1}{6} - (n+1)\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)\left((2n+1)-3n\right)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(1-n)}{6}
\end{aligned}$$

Remarque : $|i-j|$ vaut $i-j$ si $i-j$ est positif, et $j-i$ si $i-j$ est négatif.

Exercice 16 (Comparaison de suites). Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq 1 \times \ldots \times n \leq n^n$
Par récurrence.
Initialisation pour $n = 1$: $2^{1-1} = 1$, $1 \times \ldots \times 1 = 1$ et $1^1 = 1$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$ Alors, d'une part, $2^{n+1-1} = 2^n = 2 \times 2^{n-1} \leq 2n!$ par hypothèse de récurrence et pour $n \geq 1, n+1 \geq 2$ d'où : $2n! \leq (n+1)n! = (n+1)!$
Ainsi : $2^n \leq (n+1)!$
Par ailleurs, $(n+1)^{n+1} = (n+1)(n+1)^n \geq (n+1)n^n \geq (n+1)n! \geq (n+1)!$ et la récurrence est établie.

Exercice 17 (Une propriété étonnante). Que pensez-vous de la démonstration ci-dessous ?

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété : «$\mathcal{P}(n)$: pour tous n points du plan, ces points appartiennent à une même droite»
Initialisation : Pour $n = 1$, la propriété est évidente
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifiée, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.
Soient $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$ des points du plan. Alors, par hypothèse de récurrence, il existe une droite (d_1) contenant $M_1, \ldots, M_n$ De même, il existe une droite (d_1) contenant $M_2, \ldots, M_{n+1}$. Comme (d_1) et (d_2) ont $n-1$ points en commun, elles sont confondues. Ainsi, $M_1, \ldots, M_{n+1}$ sont alignés et la propriété est héréditaire.
Conclusion : toute famille de points du plan est alignée sur une même droite.

Ici, «l'arnaque» réside dans «(d_1) et (d_2) ont $n-1$ points en commun donc sont confondues», une propriété vraie sauf pour $n = 1$ et $n = 2$ (des droites qui ont un point en commun ne sont pas nécessairement confondues). L'hérédité est valable seulement pour $n \geq 3$ et l'initialisation seulement pour $n \leq 2$